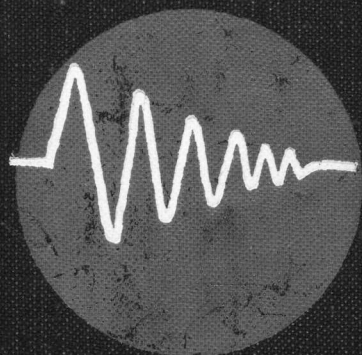


Ф. Арекки
М. Скалли
Г. Хакен
В. Вайдлих



Квантовые
флуктуации
излучения
лазера

QUANTUM OPTICS

ed. by R. J. Glauber

ACADEMIC PRESS, NEW YORK

1969

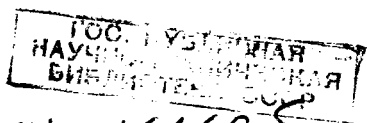
КВАНТОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЛАЗЕРА

Ф. Арекки, М. Скалли,
Г. Хакен, В. Вайдлих

Перевод с английского
канд. физ.-мат. наук
Г. И. СУРДУТОВИЧА

Под редакцией
канд. физ.-мат. наук
А. П. КАЗАНЦЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1974



74-161698

В сборник вошли три курса лекций, прочитанных в Международной школе физиков им Э. Ферми (Варенна, 1967) ведущими специалистами в данной области Ф. Арекки, Г. Хакеном, В. Вайдлихом и М. Скалли.

В этих лекциях подробно изложены следующие два вопроса: статистика фотоотсчетов и квантовая теория лазера.

Метод фотоотсчетов находит в последнее время все более широкое применение при изучении статистических свойств световых полей. Квантовая теория лазера рассматривает флуктуации лазерного излучения, обусловленные спонтанным излучением атомов.

Содержащиеся в сборнике лекции могут служить подробным введением в указанную область физики лазеров. Книга представляет интерес для широкого круга исследователей, работающих в области физики и техники лазеров, а также для преподавателей, аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Редакция литературы по физике

К. $\frac{20405-053}{041(01)-74}$ 53-74

© Перевод на русский язык, «Мир», 1974

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящий сборник вошли лекции по статистике лазерного излучения, которые были прочитаны в Летней школе физиков им. Энрико Ферми в Варенне (Италия) в 1967 г. Их авторы являются известными специалистами по квантовой оптике.

Речь в этих лекциях идет об исследовании флуктуаций излучения лазера, которые обусловлены квантовыми свойствами атомов и поля. Технические шумы здесь не рассматриваются. Хотя они обычно значительно больше квантовых флуктуаций, в некоторых случаях от них можно избавиться. Поскольку квантовые флуктуации невозможно уменьшить, они налагают некоторые принципиальные ограничения на когерентные свойства излучения (ширину линии излучения, корреляционные свойства излучения на больших расстояниях и временах, стабильность генерации и т. д.).

За последнее время было переведено несколько книг по общим вопросам квантовых свойств оптических полей. Отметим монографии Клаудера и Сударшана «Основы квантовой оптики», Люиселла «Излучение и шумы в квантовой электронике» и сборник «Когерентные состояния в квантовой теории».

В этих книгах излагаются общие методы описания квантовых свойств поля: представление когерентных состояний, представление когерентных свойств поля с помощью корреляционных функций, теория фотоотсчетов и другие вопросы. В настоящих лекциях эти общие методы применяются к изучению когерентных свойств лазерного излучения.

Экспериментально флуктуации излучения в оптическом диапазоне можно изучать двумя способами: 1) методами гетеродинирования, заимствованными из статистической радиофизики, и 2) методом счета фотонов, падающих на фотодетектор (метод фотоотсчетов).

Второй метод стал применяться сравнительно недавно, и он еще мало описан в нашей литературе. В лекциях Ареки излагаются основы этого метода. Подробно анализируется основной вопрос статистики фотоотсчетов: как по функции распределения фотоотсчетов восстановить функцию распределения фотонов падающего на детектор излучения. Рассматриваются линейный и нелинейный методы детектирования, указаны области их применимости. Оба метода используются для нахождения распределения фотонов в лазере и корреляции интенсивностей.

В лекциях Скалли развивается квантовая теория газового лазера, построенная в работах Скалли и Лэмба. За счет некоторого упрощения модели лазера автору удалось изложить основы квантовой теории в очень ясной и наглядной форме. Найдены функция распределения фотонов и ширина линии излучения.

В лекциях Хакена и Вайдлиха рассматривается иной метод решения квантовой задачи, в основе которого лежит обобщение метода случайных сил Ланжевена на операторные функции. Авторы анализируют корреляционную функцию интенсивностей в области порога генерации. Вычисления хорошо согласуются с измерениями Ареки.

В дополнении к сборнику приведены некоторые последующие результаты по квантовой теории лазера. Излагается, в частности, точное решение квантовой задачи, которое позволяет рассмотреть различные типы лазеров при произвольных энергиях. Прослеживается аналогия с фазовыми переходами первого и второго рода и с критическими явлениями. Приводятся ссылки на некоторые работы, опубликованные в последнее время.

*А. Казанцев
Г. Сурдутович*

1. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФОТООТСЧЕТОВ И СТАТИСТИКА ПОЛЯ

Ф. Т. Арекки ¹⁾

§ 1. Введение

Изучая статистику фотоотсчетов (СФО), мы по измерению изменений, вызываемых в ансамбле атомов (фотодетекторе), определяем статистические свойства светового луча. Тот факт, что эти атомы слабо связаны со световым полем, позволяет пренебречь обратным воздействием фотодетектора на поле. В настоящее время наиболее подходящими детекторами на оптических частотах являются светочувствительные атомы, которые при каждом поглощении фотона испускают электрон. Мы будем рассматривать только такие фотоионизационные детекторы и будем делать выводы о свойствах электромагнитного поля по измерению зарядов, получаемых из светочувствительного объема.

В первой части этих лекций (§ 1—5) обсуждается постановка и интерпретация эксперимента по СФО. Во второй части (§ 6) методы СФО применяются для детального экспериментального анализа одномодового лазера, который пока что представляет собой систему, наиболее изученную как с теоретической, так и с экспериментальной точки зрения. В третьей части (§ 7) обсуждается приложение к проблемам рассеяния и показывается, как, используя лазерный источник и анализ СФО рассеянного средой света, можно получить информацию о внутренних свойствах различных статистических сред.

Прежде чем детально обсуждать осуществление и интерпретацию эксперимента по СФО, дадим краткий эвристический вывод соотношений между выходом

¹⁾ F. T. *Arecchi*, CISE Laboratories — Segrate (Milano), Istituto di Fisica dell'Università — Milano.

фотодетектора и параметрами падающего поля. Мы опустим все тонкие математические вопросы, поскольку они излагаются другими лекторами этой школы [1]. Из теории Глаубера [2] известно, что, измеряя набор корреляционных функций¹⁾

$$G^{(n)}(\mathbf{r}_1, t_1; \dots; \mathbf{r}_{2n}, t_{2n}) = \text{Sp} \{ \rho E^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \dots E^{(-)}(\mathbf{r}_n, t_n) \times \\ \times E^{(+)}(\mathbf{r}_{n+1}, t_{n+1}) \dots E^{(+)}(\mathbf{r}_{2n}, t_{2n}) \}, \quad (1.1)$$

можно получить важную информацию о характере электромагнитного поля. Здесь $E^{(+)}$ и $E^{(-)}$ являются соответственно положительно- и отрицательно-частотными операторами, которые описывают поле в данной точке пространства и времени, а ρ есть оператор плотности.

Для упрощения экспериментальной ситуации будем различать два типа проблем:

а) изучение временной эволюции поля в данной точке [3]²⁾ [в первом порядке ($n = 1$) для этого можно использовать интерферометр Майкельсона с варьируемым расстоянием между зеркалами и фотодетектор];

б) изучение пространственного распределения поля в данный момент времени (в первом порядке это можно осуществить при помощи интерферометра Юнга с варьируемым расстоянием между двумя отверстиями и фотодетектора).

В этих лекциях мы ограничимся в основном проблемами первого типа, т. е. временной эволюцией полей, и главным образом корреляционными функциями при $n > 1$.

Рассмотрим электромагнитное поле, ограниченное в конечной полости, и выделим одну пространственную

¹⁾ Для простоты все уравнения, начиная с (1.1), мы записываем для линейно поляризованного поля, избегая, таким образом, векторных обозначений.

²⁾ Это нужно, очевидно, понимать во вполне макроскопическом смысле. Под «данной точкой» следует подразумевать область, минимальный линейный размер которой больше длины волны. В случае лазерного света нетрудно в зависимости от геометрии резонатора и модового числа выбрать подходящую апертуру перед фотоэлементом. При рассеянии плоской волны критерий заключается в выборе такой «площади когерентности» на детекторе, чтобы телесный угол был меньше дифракционного угла от рассеивателя (подробности см. в § 7).

моду. В случае лазерного источника или при экспериментах по рассеянию это очень легко сделать, как только мы выберем геометрию источника и рассеивающей среды. С классической точки зрения комплексное световое поле E одной моды реализует двумерный стохастический процесс. Если нас интересует поле в пределах конечного интервала времени T_0 , то можно произвести разложение процесса в ряд Фурье по гармоникам основной частоты $2\pi/T_0$

$$E(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp[-i\omega_k t] + \text{компл. сопр.}, \quad (1.2)$$

где $\omega_k = k2\pi/T_0$.

Полную информацию об этом поле можно получить, приписав амплитуде каждой фурье-компоненты совместную плотность вероятности

$$P(A_1 \dots A_k \dots) = P(\{A_k\}). \quad (1.3)$$

Тогда среднее от любой функции поля $f(E)$ будет определяться выражением

$$\langle f(E) \rangle = \int \dots \int f[E\{A_k\}] P(\{A_k\}) \prod_k d^2 A_k. \quad (1.4)$$

В обычных спектроскопических экспериментах мы измеряем среднюю энергию каждой гармоники. Знания средних значений достаточно для полной характеристики полей, создаваемых хаотическими источниками, поскольку такие поля представляют собой гауссов процесс с нулевым средним значением. Для очень больших T_0 хаотические поля можно охарактеризовать следующей совместной плотностью вероятности:

$$P(\{A_k\}) = \prod_k \frac{\exp[-|A_k|^2/\langle n_k \rangle]}{\pi \langle n_k \rangle}, \quad (1.5)$$

где $\langle n_k \rangle$ — среднее число фотонов в k -й гармонике. Гауссово распределение является очень простым и характеризуется только одним вторым моментом M_2 , поскольку для моментов высших порядков

$$M_{2k+1} = 0, \quad M_{2k} = k! (M_2)^k. \quad (1.6)$$

Следовательно, набор средних интенсивностей (по одной для каждой гармоники) полностью характеризует световой пучок. Однако для произвольного светового поля это никоим образом не так. Поля более общего вида должны описываться посредством измерения большого (теоретически бесконечного) числа моментов, чтобы по ним можно было восстановить функцию $P(\{A_k\})$.

После этих элементарных рассуждений вернемся к проблеме определения матрицы плотности поля. С помощью P -представления Глаубера [2] матрицу ρ можно записать через операторы проектирования на когерентные состояния

$$\rho(t) = \int \dots \int |\{\alpha_k\}\rangle \langle \{\alpha_k\}| P(\{\alpha_k\}) \prod_k d^2\alpha_k, \quad (1.7)$$

где P является вещественной функцией комплексных амплитуд $\{\alpha_k\}$. Таким образом, в представлении когерентных состояний задача сводится к определению $P(\{\alpha_k\})$ ¹⁾.

Чрезвычайно важно остановиться на двух различных способах описания временной эволюции случайного процесса (в нашем случае амплитуды одномодового поля).

1.1. *Описание посредством разложения в ряд Фурье* [5]. Случайное изменение со временем комплексной амплитуды одномодового поля мы описываем посредством разложения в ряд Фурье (1.2), подразумевая при этом существование совместной функции распределения всех комплексных амплитуд. Так, например, среднее значение положительно-частотной части оператора поля в представлении когерентных состояний запишется в виде

$$\mathcal{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}) \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}} \alpha_k \exp[-i\omega_k t], \quad (1.8)$$

где набор случайных переменных $\{\alpha_k\}$ задается весовой функцией $P(\{\alpha_k\})$. Величина $P(\{\alpha_k\})$ является квази-

¹⁾ Мы используем здесь эвристический подход, рассматривая $P(\alpha)$ как истинную плотность вероятности. В более общих случаях это может привести к заблуждению (см. работы [2, 4]).

вероятностной плотностью реализации набора $\{\alpha_k\}$ при измерении за время $T > 2\pi/\omega$. Следовательно, корреляционная функция n -го порядка определяется выражением

$$G^{(n)}(t_1 \dots t_{2n}) = \int \mathcal{E}^{(-)}(t_1, \{\alpha_k\}) \dots \mathcal{E}^{(+)}(t_{2n}, \{\alpha_k\}) P(\{\alpha_k\}) \prod_k d^2\alpha_k, \quad (1.9)$$

где пространственная зависимость опущена, поскольку нас интересует здесь только эволюция во времени.

1.2. *Описание с помощью последовательности функций распределения вероятности.* Мы можем также рассмотреть комплексную амплитуду моды как стохастическую переменную, т. е. записать среднее значение положительно-частотного оператора в виде

$$\mathcal{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}) \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \alpha(t) \exp[-i\omega t] \quad (1.10)$$

и определить $\alpha(t)$ посредством набора функций распределения вероятности:

$W_1(\alpha, t) d^2\alpha$ = вероятность обнаружения значения α в области $d^2\alpha$ вокруг α в момент времени t ;

$W_2(\alpha_1, t_1; \alpha_2, t_2) d^2\alpha_1 d^2\alpha_2$ = совместная вероятность обнаружения двух значений α в областях $d^2\alpha_1$ и $d^2\alpha_2$ в моменты времени t_1 и t_2 и т. д. [6]. В таком случае функцию $G^{(n)}$ можно представить следующим образом:

$$G^{(n)}(t_1 \dots t_{2n}) = \int \mathcal{E}^{(-)}(\alpha_1, t_1) \dots \mathcal{E}^{(+)}(\alpha_{2n}, t_{2n}) \times \\ \times W_n(\alpha_1, t_1; \dots \alpha_{2n}, t_{2n}) \prod_k d^2\alpha_k, \quad (1.11)$$

где W_n — совместная плотность вероятности измерения α_1 в момент времени t_1 , α_2 — в момент времени t_2 и т. д. Если ограничиться марковскими процессами, то задание совместной функции распределения второго порядка будет характеризовать процесс полностью. Для лучшего понимания физического смысла такого предположения

о марковском характере процесса определим n -ю условную вероятность P_n измерения α_n в момент времени t_n при заданных значениях α_1 в момент времени $t_1, \dots, \dots, \alpha_{n-1}$ в момент времени t_{n-1} посредством следующего соотношения между n -й и $(n-1)$ -й совместными функциями распределения:

$$\begin{aligned} W_n(\alpha_1, t_1; \dots \alpha_n, t_n) &= \\ &= P_n(\alpha_1, t_1; \dots \alpha_{n-1}, t_{n-1} | \alpha_n, t_n) W_{n-1}(\alpha_1, t_1; \dots \alpha_{n-1}, t_{n-1}). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Таким образом, мы можем по отношению к дискретной последовательности времен $t_1, t_2 \dots t_n$ определить марковский процесс как «процесс с ближней памятью», такой, что условная вероятность последнего события зависит только от предыдущего и не зависит от более ранних событий, т. е.

$$P_n(\alpha_1, t_1; \dots \alpha_{n-1}, t_{n-1} | \alpha_n, t_n) = P_2(\alpha_{n-1}, t_{n-1} | \alpha_n, t_n). \quad (1.13)$$

Из уравнений (1.12) и (1.13) нетрудно получить, что, например, для $n = 3$

$$\begin{aligned} W_3(\alpha_1, t_1; \alpha_2, t_2; \alpha_3, t_3) &= \\ &= \frac{W_2(\alpha_1, t_1; \alpha_2, t_2) W_2(\alpha_2, t_2; \alpha_3, t_3)}{W_1(\alpha_2, t_2)}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

и т. д., вплоть до W_n .

Предположение о марковском характере процесса оказывается оправданным во многих практически интересных случаях при изучении взаимодействия света [7, 8, 54] с веществом¹⁾.

В этих случаях условная вероятность $P(\alpha_0 | \alpha, t)$ измерения значения α в момент времени t при начальном значении α_0 подчиняется уравнению Фоккера — Планка (или обобщенному уравнению диффузии). На этом эвристическом языке P есть не что иное, как глауберова весовая функция оператора плотности²⁾. При таком

¹⁾ См. также остальные статьи настоящего сборника.

²⁾ Действительно, во всех случаях, рассмотренных в работах [7, 8, 54], приведенный оператор плотности полевой моды подчиняется марковскому управляющему уравнению, и легко показать, что соответствующая P -функция в разложении по когерентным состояниям подчиняется уравнению Фоккера — Планка.

подходе в момент времени t оператор плотности полевой моды, которая в момент t_0 находилась в чистом состоянии $|\alpha_0\rangle$, запишется в виде

$$\rho(t)|_{\alpha_0} = \int |\alpha\rangle \langle\alpha| P(\alpha_0, t_0 | \alpha, t) d^2\alpha. \quad (1.15)$$

За большие времена, когда система (т. е. рассматриваемая мода) вследствие взаимодействия с резервуарами «забывает» о начальных условиях, условная вероятность сводится к безусловной

$$P(\alpha_0 | \alpha, t) \rightarrow W_1(\alpha, t), \quad (1.16)$$

и предыдущее соотношение принимает вид

$$\rho(t) = \int |\alpha\rangle \langle\alpha| W_1(\alpha, t) d^2\alpha. \quad (1.15a)$$

Чтобы показать различие между этими двумя описаниями, представим совместную вероятность $W_2(\mathcal{E}_1^{(+)}t_1, \mathcal{E}_2^{(+)}t_2)$ измерения двух значений поля в различные моменты времени следующим образом:

а) используя фурье-разложение [см. (1.8)]

$$\begin{aligned} W_2(\mathcal{E}_1^{(+)}t_1, \mathcal{E}_2^{(+)}t_2) = & \int P(\{\alpha_k\}) \delta^{(2)}\left(\mathcal{E}_1^{(+)} - \sum_k \alpha_k \exp[-i\omega_k t_1]\right) \times \\ & \times \delta^{(2)}\left(\mathcal{E}_2^{(+)} - \sum_k \alpha_k \exp[-i\omega_k t_2]\right) \prod_k d^2\alpha_k; \quad (1.17) \end{aligned}$$

здесь α_k имеет смысл амплитуды k -й гармоники фурье-разложения;

б) используя описание с помощью набора функций распределения [см. (1.10)]

$$\begin{aligned} W_2(\mathcal{E}_1^{(+)}t_1, \mathcal{E}_2^{(+)}t_2) = & \\ = & \int W(\alpha_1, t_1; \alpha_2, t_2) \delta^{(2)}(\mathcal{E}_1^{(+)} - \alpha_1 \exp[-i\omega t_1]) \times \\ & \times \delta^{(2)}(\mathcal{E}_2^{(+)} - \alpha_2 \exp[-i\omega t_2]) d^2\alpha_1 d^2\alpha_2; \quad (1.18) \end{aligned}$$

здесь α_1 и α_2 имеют смысл двух различных значений одной и той же стохастической переменной $\alpha(t)$.

В дальнейшем для описания экспериментальных результатов мы примем подход с использованием набора функций распределения W_n .

§ 2. Распределения фотоотсчетов

При измерении электромагнитного поля методом СФО ансамбль светочувствительных атомов (фотодетектор) приводится в контакт с полем (при этом обратное воздействие фотодетектора на источник поля предполагается столь слабым, что им практически можно пренебречь), после чего подсчитывается число фотоэлектронов, выбитых за данный промежуток времени T . Функция распределения $p(n, T)$ n фотоэлектронных отсчетов за время T связана с распределением вероятности $W_1(\alpha)$ амплитуды поля следующей формулой [9—11]¹⁾:

$$p(n, T, t) = \int K(|\alpha|^2 T |n) W_1(\alpha, t) d^2\alpha, \quad (2.1)$$

где ядро K описывает процесс фотодетектирования. Время измерения T должно быть меньше наименьшего времени релаксации τ_c (время когерентности) флуктуаций случайного процесса $\alpha(t)$; в противном случае необходимо разбить T на интервалы, меньшие чем τ_c , и провести интегрирование по времени. Однако эта процедура означает сглаживание, которое приводит к уменьшению информации о статистике поля, поэтому всегда лучше использовать $T \ll \tau_c$.

Наглядный, хотя и не вполне точный способ определения ядра K состоит в следующем. Возьмем одномодовое поле в когерентном состоянии со средним числом фотонов $\langle m \rangle = |\alpha|^2$. Средняя плотность фотонов есть $\langle m \rangle / V_c$, где V_c — объем моды. В предположении справедливости первого порядка теории возмущений вероятность перехода пропорциональна плотности электромагнитной энергии в данной точке, и, следовательно, для

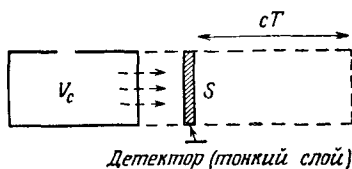
¹⁾ В работе [9] представлено полуклассическое рассмотрение процесса фотодетектирования. Квантовый подход приведен в работе [2] (см., кроме того, [3, 10, 11]).

среднего числа зарегистрированных за время T фотоэлектронов получаем следующую формулу:

$$\langle n \rangle_T = \frac{|\alpha|^2}{V_c} cTS\eta = sT|\alpha|^2, \quad (2.2)$$

где c — скорость света, S — площадь фотодетектора, $\eta \ll 1$ — квантовый выход, который равен среднему коэффициенту конверсии электроны/фотоны, и $s = cS\eta/V_c$ — чувствительность фотодетектора (фиг. 1). На схеме

фиг. 1 заключенное в резонаторной полости V_c одно-модовое поле может «просачиваться» через полупрозрачную стенку. Если поле описывается функцией $P(\alpha)$, то ослабитель можно рассматривать с помощью чисто затухательного члена λ ($|\lambda| < 1$), который не иска-



Фиг. 1. Схема идеального эксперимента по фотодетектированию.

жает статистику, но уменьшает среднее число фотонов в масштабе от $|\alpha|^2$ к $|\lambda\alpha|^2$ [9, 47]. Затем свет падает нормально на фотодетектирующий объем (практически это обычно тонкий слой светочувствительных атомов). Если время измерения равно T , то «охватываемый» детектором объем равен cTS , иными словами, это соответствует случаю, когда детектирующие атомы распределены по всему объему cTS (S — поперечное сечение тонкого слоя).

Как известно, вероятность наблюдения m квантов для находящегося в когерентном состоянии одномодового поля дается выражением [2]

$$|\langle m | \alpha \rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2m} \exp[-|\alpha|^2]}{m!}. \quad (2.3)$$

Таким образом, для когерентного состояния получаем следующее распределение фотоотчетов (см. [31]):

$$p(n, T) = \frac{(s|\alpha|^2 T)^n}{n!} \exp[-s|\alpha|^2 T] = K(|\alpha|^2 T | n). \quad (2.4)$$

По этой же причине для смеси когерентных состояний, описываемой квазивероятностной функцией $W_1(\alpha)$, мы

получим распределение фотоотсчетов (2.1) с записанным выше ядром. Другими словами, вероятность регистрации n фотонов за время T представляет собой в некотором роде среднее по соответствующим вероятностям для ансамбля пуассоновских распределений. В основе такого упрощенного вывода лежит предположение о широкополосности детектора¹⁾, что делает эксперимент по СФО чувствительным только к корреляциям интенсивности, поскольку в каждый момент времени выход пропорционален квадрату поля. Как показано в разд. 4.3, узкополосный детектор позволяет определить также и фазовые корреляции.

Уравнение (2.1) определяет $p(n, T, t)$ как среднее по ансамблю различных реализаций системы, распределенных в соответствии с весовой функцией $W_1(\alpha, t)$ и взятых в один и тот же момент времени t . Однако для стационарного поля можно применить эргодическую теорему²⁾ и в качестве ансамбля выбрать последовательные состояния одной и той же системы. При этом необходимо, чтобы промежуток времени между двумя последовательными измерениями значительно превышал наибольшее время релаксации поля. Действительно, соотношение (2.2) получено из матрицы плотности (1.15а); поэтому временной интервал между двумя последовательными измерениями должен быть таким, чтобы условие (1.16) не нарушалось.

¹⁾ Желая уделить основное внимание процедурам измерения, мы уже ограничили общее рассмотрение (см. работу [9]) случаем обычных фотодетекторов. Помимо основных двух допущений (о пренебрежении пространственными вариациями поля по поперечному сечению детектора и временными изменениями за время одного наблюдения), предполагалось, что атомы реагируют на поле «мгновенно», т. е. характерное время процесса фотодетектирования много меньше τ_c . Это так называемое широкополосное допущение, так как оно эквивалентно утверждению о том, что полоса пропускания детектора больше протяженности $1/\tau_c$ частотного спектра источника. «Узкополосный» фотодетектор можно получить путем соединения обычного фотодетектора с интерферометром Майкельсона или Фабри — Перо.

²⁾ Ее применимость здесь сомнений не вызывает, поскольку одномодовое поле находится обычно в «контакте» с большим числом степеней свободы (резервуарами).

Если проводить каждое измерение за время $T \ll \tau_c$, то невозможно получить никакой информации о временной эволюции стохастического процесса. Чтобы получить такого рода информацию, необходимо скоррелировать измерения, проведенные в различные моменты времени.

Совместная функция распределения вероятности $W_2(n_1 t_1, n_2 t_2)$ регистрации n_1 отсчетов за время T при $t = t_1$ и n_2 отсчетов за время T при $t = t_2$ связана с совместной вероятностью $W_2(\alpha_1 t_1, \alpha_2 t_2)$ следующей формулой [12]:

$$W_2(n_1 t_1, n_2 t_2) = \\ = \int \int K(|\alpha_1|^2 T | n_1) K(|\alpha_2|^2 T | n_2) W_2(\alpha_1 t_1, \alpha_2 t_2) d^2 \alpha_1 d^2 \alpha_2. \quad (2.5)$$

В общем случае для немарковского поля детальная информация может быть получена путем измерения совместных распределений фотоотсчетов высших порядков, которые связаны с совместными функциями распределения вероятности для поля подобным же образом.

Рассмотрим теперь несколько примеров полевых функций распределения:

- а) $W_1(\alpha) = \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_0)$,
- б) $W_1(\alpha) = \frac{\delta^{(2)}(|\alpha| - |\alpha_0|)}{2\pi |\alpha_0|}$,
- в) $W_1(\alpha) = \frac{\exp[-|\alpha|^2 / \langle n \rangle]}{\pi \langle n \rangle}$.

Первый пример описывает поле с фиксированной комплексной амплитудой и соответствует полностью когерентному полю. Второй соответствует полю с фиксированной по модулю амплитудой и однородным распределением по фазе и может рассматриваться как хорошее приближение для стабилизированного по интенсивности лазерного поля достаточно высоко над порогом генерации. Третья функция распределения описывает поле, у которого комплексная амплитуда имеет гауссово распределение с центром в начале координат α -плоскости; это функция распределения случайного светового поля.

Для вывода соответствующих распределений $p(n, T)$ мы можем воспользоваться непосредственно соотношением (2.4), но можно также использовать другой метод, который упрощает вычисления. Введем производящую функцию $Q(\lambda)$ следующим образом [2]:

$$Q(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \lambda)^n p(n, T). \quad (2.7)$$

Функция $p(n, T)$ выражается через $Q(\lambda)$ обратным соотношением

$$p(n, T) = \frac{1}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^n Q(\lambda, T)_{\lambda=1} \quad (2.8)$$

и k -й факториальный момент распределения $p(n, T)$ дается выражением

$$\langle n(n-1) \dots (n-k+1) \rangle = \left(-\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^k Q(\lambda, T)_{\lambda=0}. \quad (2.9)$$

Применим теперь производящую функцию для вычисления распределений СФО нескольких полей. Из (2.3) следует, что соответствующая чисто когерентному полю функция распределения фотоотчетов является пуассоновской. Для такой функции распределения СФО мы получаем следующую производящую функцию:

$$Q(\lambda, T) = \exp[-s|\alpha|^2 T] \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \lambda)^n \frac{(s|\alpha|^2 T)^n}{n!} = \\ = \exp[-\lambda(s|\alpha|^2 T)]. \quad (2.10)$$

Используя соотношение (2.1), для описываемой посредством $W_1(\alpha)$ статистической смеси состояний получаем

$$Q(\lambda, T) = \int \exp[-\lambda(s|\alpha|^2 T)] W_1(\alpha) d^2\alpha. \quad (2.11)$$

В случае гауссова поля это дает ¹⁾

$$Q(\lambda, T) = \frac{1}{1 + \lambda \langle n \rangle}, \quad (2.12)$$

и с помощью (2.8) отсюда находим

$$p(n, T) = \frac{1}{1 + \langle n \rangle} \left(\frac{\langle n \rangle}{1 + \langle n \rangle} \right)^n. \quad (2.13)$$

¹⁾ С точностью до постоянного множителя. — Прим. ред.

Это распределение называют геометрическим или распределением Бозе — Эйнштейна¹⁾. Оно описывает распределение фотонов поля излучения абсолютно черного тела в одну моду со средним значением $\langle n \rangle = (\exp[\hbar\omega/kT] - 1)^{-1}$. Дисперсии, связанные с этим распределением и с распределением Пуассона для когерентного и амплитудно-стабилизированного поля, равны соответственно

$$\begin{aligned} \langle \Delta n^2 \rangle &= \langle n \rangle (1 + \langle n \rangle), \\ \langle \Delta n^2 \rangle &= \langle n \rangle. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Если имеется суперпозиция двух полей, характеризующихся функциями распределения $W'_1(\alpha)$ и $W''_1(\alpha)$, то результирующее поле задается формулой свертки [2]

$$W_1(\alpha) = \int W'_1(\beta) W''_1(\alpha - \beta) d^2\beta.$$

Так, например, функция распределения суперпозиции гауссова поля со средним числом фотонов $\langle m \rangle$ и полностью когерентного поля в чистом состоянии $|\alpha_0\rangle$ имеет вид

$$W_1(\alpha) = \frac{\exp[-(|\alpha - \alpha_0|^2/\langle m \rangle)]}{\pi \langle m \rangle}. \quad (2.15)$$

Соответствующие этой функции значения Q и p задаются выражениями [10]:

$$Q(\lambda, T) = \frac{1}{1 + \lambda N} \exp\left[-\frac{\lambda S}{1 + \lambda N}\right], \quad (2.16)$$

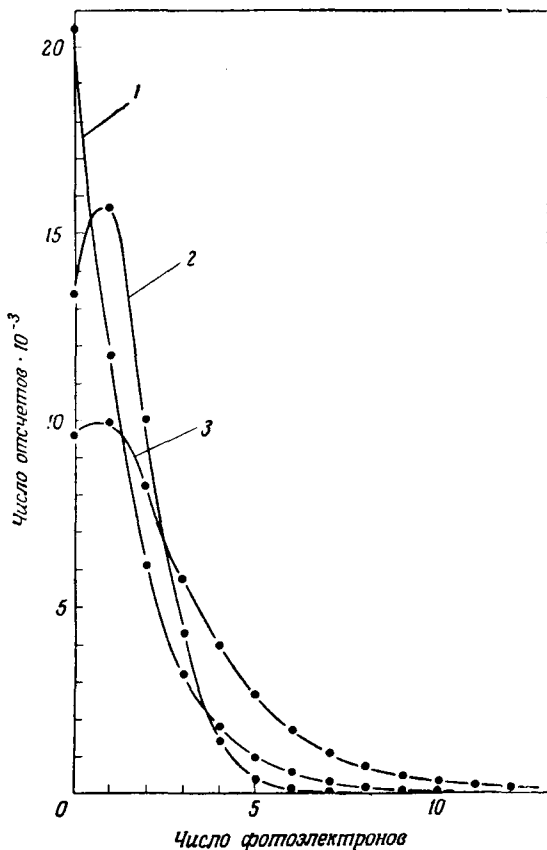
$$p(n, T) = \frac{N^n}{(1 + N)^{n+1}} L_n\left(\frac{-S}{(1 + N)N}\right) \exp\left[-\frac{S}{1 + N}\right], \quad (2.17)$$

где $S = |\alpha_0|^2 sT$ — среднее число фотоотсчетов, вызываемых когерентным полем, $N = \langle m \rangle sT$ — среднее число фотоотсчетов, вызываемых гауссовым полем, L_n — полином Лагерра n -го порядка.

Связанные с этим распределением среднее значение и дисперсия имеют вид

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= S + N, \\ \langle \Delta n^2 \rangle &= S + N(1 + N) + 2SN. \end{aligned} \quad (2.18)$$

¹⁾ Обычно его называют планковским распределением. — Прим. ред.

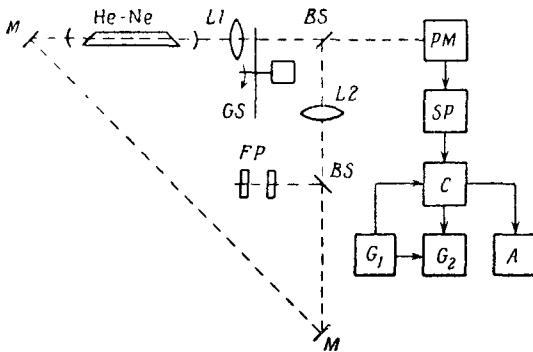


Фиг. 2. Распределения фотоотсчетов гауссова поля (1), лазерного поля (2) и поля, представляющего собой суперпозицию этих двух полей (3) (нелинейный метод). Кривые не нормированы.

Мы видим, что во втором выражении, помимо дисперсий, присущих когерентной и гауссовой компонентам и уже определенных в (2.14), содержится еще интерференционный член $2SN$.

Кривые СФО, соответствующие когерентному полю [выражение (2.4)], гауссову полю [выражение (2.13)] и суперпозиции этих двух полей [выражение (2.17)], приведены на фиг. 2. Обсудим теперь кратко, каким фи-

зическим источникам соответствует каждое из этих распределений СФО. Предположение о том, что поле излучения одномодового лазера можно аппроксимировать когерентным состоянием, было впервые высказано Глаубером [13]; более подробно мы обсудим его в § 6. При первом сравнении когерентного и гауссова полей с помощью СФО [14] для получения когерентного поля



Фиг. 3. Экспериментальная установка для измерения распределения фотоотчетов.

M — зеркала; *BS* — полупрозрачные зеркала (расщепители пучка); *L* — линзы; *PM* — умножительный фотоэлемент 56 AVP Филипс; *SP* — стандартизатор импульсов; *C* — преобразователь числа импульсов в амплитуду; *G*₁ — затвор (частота повторения от 500 до 10 000 Гц, ширина импульсов от 20 до 100 мкс); *G*₂ — затвор задержки (задержка от 0 до 100 мкс, ширина 1 мкс); *A* — 256-канальный амплитудный анализатор импульсов; *GS* — матовый стеклянный экран.

использовался одномодовый амплитудно-стабилизированный лазер значительно выше порога генерации. Использование в качестве одномодового гауссова поля отфильтрованного излучения абсолютно черного тела сопряжено с трудностями вследствие малого среднего числа фотонов на одну моду при разумных температурах ($\langle n \rangle = (\exp[\hbar\omega/kT] - 1)^{-1} \approx 10^{-3}$ для оптических частот и при $T \approx 6000$ К). Эту трудность удалось преодолеть, посылая одномодовый лазерный пучок на движущийся матовый стеклянный диск (фиг. 3) и наблюдая случайную суперпозицию дифрагированных лучей (более подробно см. в § 7). Поскольку рассеивающие центры некоррелированы, то это сводится к типичной проблеме случайных блужданий и функция распределения результирующей амплитуды является гауссовой.

В настоящее время удается достигнуть лучших результатов, используя в качестве рассеивающих центров броуновские частицы (§ 7). Кроме того, как было показано в работе [15], гауссово поле можно получить с помощью лазера в допороговом режиме (см. § 6).

Суперпозиция гауссова и когерентного полей обсуждалась в работе [10] и была реализована экспериментально [16] путем смешения этих полей через полупрозрачное зеркало при тщательной подгонке волновых фронтов с помощью линз (фиг. 3). В этой же работе [16] показано, что линейная суперпозиция когерентного и гауссового (шумового) полей является хорошим приближением для одномодового лазерного поля чуть выше порога генерации (см. § 6).

§ 3. Измерение распределений фотоотчетов¹⁾

Фотодетектор, применяемый в измерениях СФО, представляет собой фотоэлемент с умножителем, обладающий большим коэффициентом усиления и низким уровнем шумов. Соответствующие отдельным электронам импульсы анодного тока обрабатываются двумя различными способами (нелинейный и линейный методы), которые мы последовательно обсудим.

3.1. *Нелинейный метод и поправка на мертвое время.* В этом случае (фиг. 3) импульсы тока стандартизируются по амплитуде и форме с помощью нелинейной цепи. Таким путем удается избавиться от амплитудных флуктуаций вследствие статистического разброса при умножительном процессе на диодах умножителя и сопоставить каждому фотоэлектрону стандартный заряд. Интегрирующий конденсатор действует как преобразователь «число — амплитуда»; его напряжение соответствующим образом усиливается, а затем классифицируется многоканальным анализатором импульсов. По-

¹⁾ Эксперименты по СФО были начаты независимо четырьмя группами (в лабораториях MIT и IBM, США; Королевском радиолокационном институте, Великобритания; лабораториях CISE, Италия). См. соответственно [14—19]. Детальный анализ метода СФО и пределов его применимости, а также обзор некоторых экспериментов сделан в работе [20].

следний представляет собой электронное устройство, работающее следующим образом. Входное напряжение классифицируется дискретным образом, т. е. все импульсы с пиковым напряжением между V_k и $V_k + \Delta V$ (где $V_k = k\Delta V + V_0$ и ΔV есть «квант» напряжения, соответствующий предельному разрешению прибора) регистрируются k -м каналом. Если, например, прибор имеет 1000 каналов и ширина каждого канала $\Delta V = 10$ мВ, то вся область напряжений простирается на 10 В и, следовательно, мы можем с разрешением $1/1000$ классифицировать все напряжения между V_0 и $V_0 + 10$ В (где V_0 — пороговое напряжение, которое в данном случае можно положить равным нулю). В обычных анализаторах с цифровой памятью входящий импульс открывает затвор на время, пропорциональное максимальной высоте импульса. Затвор пропускает к счетчику последовательность импульсов с постоянной частотой. Это событие регистрируется каналом, порядковый номер которого равен числу регистрируемых импульсов. Таким образом осуществляется аналогово-цифровое преобразование.

Альтернативный способ счета числа импульсов за данное время T при нелинейном методе заключается в использовании быстрого электронного счетчика с временем отпираания T , который регистрирует число импульсов и непосредственно связан с памятью многоканального анализатора: при этом удается избежать двойного процесса преобразования, что позволяет увеличить скорость счета. Однако эта процедура регистрации не может быть использована при линейном методе (разд. 3.2).

При таком способе функция распределения $p(n, T)$ числа фотоэлектронов получается непосредственно. Приведенные на фиг. 2 функции распределения получены именно таким образом.

Нелинейная цепь после прихода каждого анодного импульса имеет мертвое время τ и поэтому импульс, который следует за предыдущим с временным интервалом, меньшим чем τ , не регистрируется. Это может исказить функцию распределения $p(n)$, особенно для высших канальных чисел. Введем параметр $\varepsilon = \tau/T$. В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ не требуется никакой коррекции

результатов, однако искажение распределений становится заметным уже в случае, когда произведение максимального канального числа $n_{\text{макс}}$ на ϵ достигает $1/100$. Минимальное мертвое время τ порядка 10 нс, поэтому время измерения T распределений, получаемых с помощью малого (< 10) числа каналов (фиг. 2), ограничивается снизу значением 1 мкс. Чтобы распространить технику СФО на стохастические процессы с временем когерентности τ_c , меньшим 1 мкс, необходимо корректировать измеряемые статистические распределения. Ранее уже предлагалось и использовалось [21—23]¹⁾ несколько методов коррекции. Мы обсудим здесь кратко новый метод [25], при котором распределение корректируется только на основе информации, содержащейся в регистрируемых данных, и в зависимости от поведения нелинейной цепи, без каких-либо априорных предположений относительно неискаженного распределения. Приводимые ниже формулы справедливы только для цепей без блокировки, в которых приходящий в течение мертвого времени импульс не увеличивает это мертвое время, а просто теряется. Подобное рассмотрение может быть проведено также и для цепей с блокировкой [25]. Обозначим через m_k число событий, зарегистрированных в конце эксперимента в k -м канале. Измеренное распределение m_k отличается от распределения фотоэлектронов n_k вследствие конечной вероятности $P_{k-r, k}$ того, что из общего числа k электронов, прибывших за время T , r электронов попали в интервалы мертвого времени, обусловленные прибытием предыдущих электронов, так что соответствующее число отсчетов сдвинулось на r . Если N — порядковый номер высшего канала, в котором зарегистрировано ненулевое число событий, т. е. $m_N \neq 0$, $m_{N+1} = m_{N+2} = \dots = 0$, то отсюда следует

$$m_l = \sum_{k=l}^N P_{l, k} n_k \quad (l = 1, \dots, N). \quad (3.1)$$

¹⁾ Используя работу [21], Джонсон и др. [22] вычислили поправки мертвого времени к распределениям СФО вплоть до второго порядка по отношению $\epsilon = \tau/T$. Бедард [23] проделал эти вычисления с учетом всех порядков по ϵ .

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} P_{00} &= P_{11} = 1, \\ P_{0l} &= 0 \quad \text{при } l \neq 0, \\ \sum_{l=1}^k P_{l,k} &= 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Согласно уравнению (3.1), все отличные от нуля матричные элементы матрицы $P_{l,k}$ расположены выше главной диагонали. Суммируя по столбцу [уравнение (3.2)], мы получаем полную вероятность распределения l фотоэлектронов по каналам $l \leq k$. Для малых ϵ и k наибольшей является вероятность $P_{k,k}$ (нулевой сдвиг). По мере увеличения ϵ или k возрастает вероятность того, что данное событие подвергнется преобразованию. «Средний» сдвиг $\langle l \rangle$ (приблизительное положение максимального коэффициента $P_{l,k}$ в каждой колонке k) определяется выражением

$$\langle l \rangle = k [1 - (k - 1) \epsilon].$$

Принимая во внимание, что, каково бы ни было распределение фотоотсчетов, вероятность $P_{k-r,k}$ сдвига от k -го к $(k-r)$ -му каналу зависит только от параметра мертвого времени ϵ и индексов k и r , мы получаем следующую формулу:

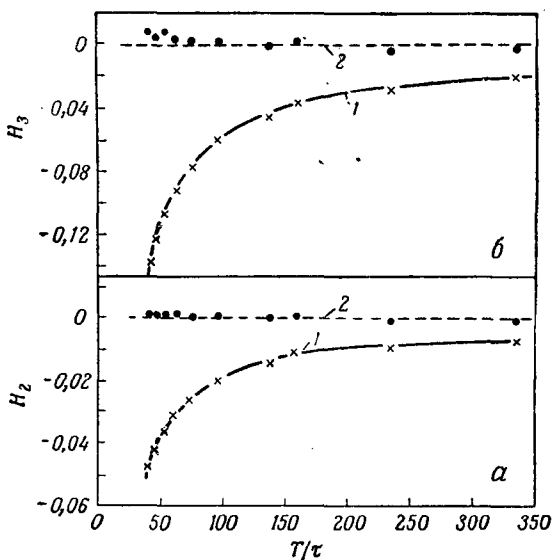
$$P_{k-r,k} = \binom{k-1}{r} \sum_{l=r}^k (-1)^l \binom{k}{l} a^{k-l} \epsilon^l \sigma_{l,r}, \quad (3.3)$$

где $a = 1 - (k - r - 1) \epsilon$ и

$$\sigma_{l,r} = \sum_{i=1}^r (-1)^i \binom{r}{i} i^l.$$

Для проверки изложенной выше теории была измерена СФО в контролируемых условиях при фиксированном значении параметра мертвого времени ϵ . В вычислительную машину вводилась соответствующая программа для расчета коэффициентов P_{lk} и корректировки экспериментального распределения посредством обращения

системы уравнений (3.1). Скорректированные распределения сравнивались затем с теоретическими распределениями, ожидаемыми в предельных случаях чисто пуассоновского или геометрического распределений.



Ф и г. 4. Графики второго (а) и третьего (б) приведенных факториальных моментов в зависимости от T/τ (отношения интервала измерения к мертвому времени) до (кривая 1) и после (кривая 2) коррекции в связи с эффектами мертвого времени.

Параметрами, выбранными в качестве очень чувствительного критерия для демонстрации эффективности коррекций, были второй и третий нормированные факториальные моменты H_2 и H_3 . На фиг. 4 приведены зависимости H_2 и H_3 от $1/\varepsilon$ для экспериментального и скорректированного распределений в случае ожидаемого геометрического распределения.

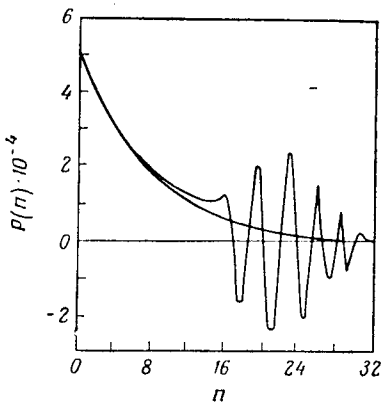
Когда произведение $\varepsilon \cdot n_{\max}$ становится больше $1/100$, полученное с помощью вычислительной машины скорректированное распределение имеет осциллирующий характер, подобный изображенному на фиг. 5. Это обусловлено большими ошибками, связанными с малым

числом отсчетов в последних каналах. Такие осцилляции можно сгладить путем наложения некоторого дополнительного условия на характер распределения (например, не допуская, чтобы распределение принимало отрицательные значения). Дальнейшие подробности изложены в работе [25].

3.2. *Линейный метод*¹⁾. В линейном методе импульсы тока от фотоумножителя посылаются на интегрирующий конденсатор непосредственно, без фильтрации их через пороговую цепь. Это исключает эффекты мертвого времени. Даже если два одноэлектронных отклика частично перекрываются, т. е. время между двумя фотоотсчетными событиями меньше времени разброса умножительной схемы, их вклады можно считать независимыми. Вследствие статистического характера умножительного процесса напряжение на интегрирующем конденсаторе перестает быть жестко связанным с числом фотоэлектронов. Измеренное распределение $p(A)$ выражается через искомое распределение фотонов $p(n)$ с помощью условной вероятности $q(n|A)$ получения на выходе значения A при условии, что за время наблюдения T пришло n фотоэлектронов, т. е.*

$$p(A) = \sum_{n=1}^{\infty} q(n|A) p(n). \quad (3.4)$$

¹⁾ Линейный метод был предложен в работе [14] и детально описан в работе [20]. Если использовавшиеся ранее времена измерения T были порядка 1 мкс, то теперь стали допустимыми времена T вплоть до 20 нс. Это очень важно для экспериментов в переходном режиме, подобных рассмотренным в § 6.



Фиг. 5. Осцилляция скорректированной функции распределения СФО.

Вероятность $q(n|A)$ представляет собой свертку цепочки единичных сомножителей, т. е. если через $q_1(A)$ обозначить амплитудное распределение от одноэлектронного отклика, то в результате получим

$$q(n|A) = \int_0^A dA_1 \dots \int_0^A dA_n q_1(A_1) \dots q_1(A_n) \delta\left(A - \sum_{i=1}^n A_i\right). \quad (3.5)$$

Мы пришли к этому полезному результату путем преобразований. Определим теперь характеристическую функцию $P(s)$ следующим образом:

$$P(s) = \sum_{A=0}^{\infty} s^A p(A). \quad (3.6)$$

При таком преобразовании величина A считается дискретной переменной, принимающей только целые значения. Действительно, A классифицируется, или «квантуется», многоканальным анализатором.

Точно так же и характеристическую функцию для одноэлектронного отклика мы определим как

$$q_1(s) = \sum_{A=0}^{\infty} s^A q_1(A).$$

Из (3.6) следует, что k -й факториальный момент $p(A)$ равен

$$\langle A(A-1) \dots (A-k+1) \rangle = \left(\frac{d}{ds}\right)^k P(s) \Big|_{s=1}. \quad (3.7)$$

Кроме того, из соотношения свертки (3.5) и из (3.4) получаем

$$P(s) = \sum_{n=1}^{\infty} [q_1(s)]^n p(n). \quad (3.8)$$

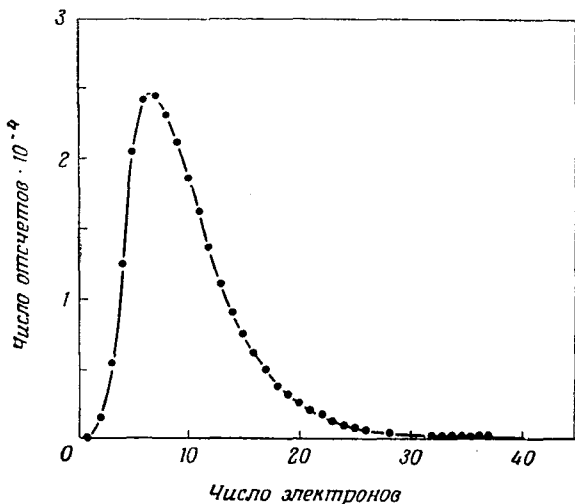
Если распределение $q_1(A)$ определено экспериментально, так что все его моменты

$$Q_k = \sum_{A=0}^{\infty} A^k q_1(A) \quad (3.9)$$

или соответствующие центральные моменты

$$Q'_k = \sum_{A=0}^{\infty} (A - Q_1)^k q_1(A) \quad (3.9a)$$

известны с точностью, лучшей чем требуемая в экспериментах по фотоотсчетам оптимальная точность, то из



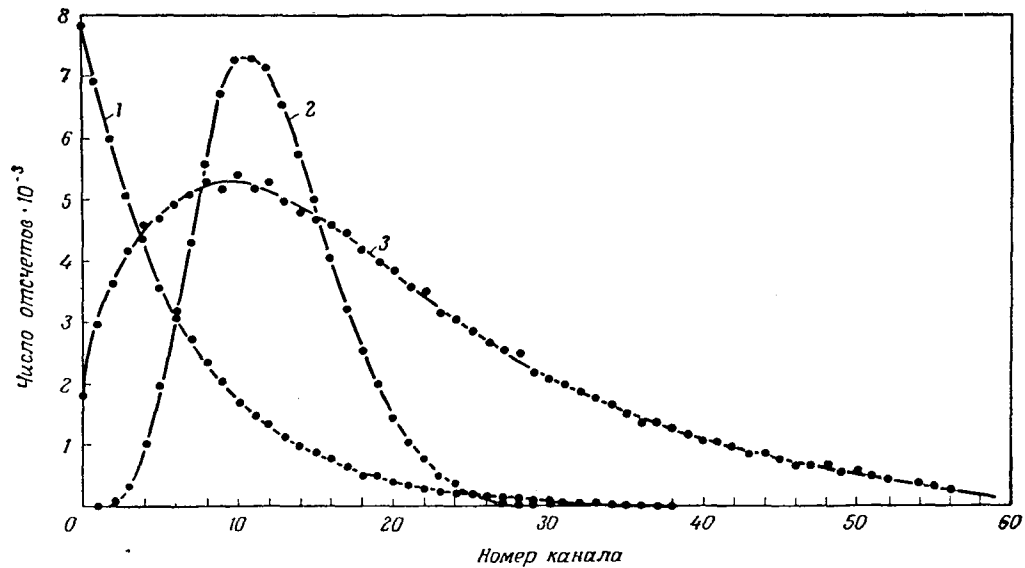
Ф и г. 6. Амплитудное распределение от одиночных фотоэлектронных импульсов на выходе фотоумножителя типа RCA 7265. $V_{D1-K} = 300$ В, $V_{полн} = 2700$ В; потенциал фокусирующего электрода был подобран таким образом, чтобы оптимизировать отношение сигнала к шуму. Одно деление по оси абсцисс соответствует $1,6 \cdot 10^6$ электронов.

измерений моментов $\langle A^k \rangle$ экспериментального распределения $p(A)$ нетрудно вычислить моменты $\langle n^k \rangle$ распределения $p(n)$. Если теперь воспользоваться уравнением (3.7), например при $k = 1$, то получим

$$\left(\frac{dP}{ds} \right)_{s=1} = \left(\frac{dq_1}{ds} \right)_{s=1} \sum_n n [q_1(s)]_{s=1}^{n-1} p(n).$$

Известно, что

$$(q_1(s))_{s=1} = \sum_A q_1(A) = 1$$



Ф и г. 7. Распределения фотоотсчетов для тех же полей, что и на фиг. 2, полученные линейным методом.

и, кроме того, согласно (3.9), $(dq_1/ds)_{s=1} = Q_1$. Поэтому мы имеем соотношение

$$\langle A \rangle = \langle n \rangle Q_1$$

и подобные же соотношения для моментов высших порядков. Например, первые три момента искомого распределения $p(n)$ выражаются через измеряемые моменты $\langle A^k \rangle$ и одноэлектронные моменты Q^k или Q'_k следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \frac{\langle A \rangle}{Q_1}, \\ \langle n^2 \rangle &= \frac{\langle A^2 \rangle - \langle n \rangle Q'_2}{Q_1^2}, \\ \langle n^3 \rangle &= \frac{\langle A^3 \rangle - 3 \langle n^2 \rangle Q_1 (Q'_2)^2 - \langle n \rangle Q'_3}{Q_1^3}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

На фиг. 6 приведен пример использования одноэлектронной статистики для вычисления моментов Q_k . Они измерялись по используемому в наших экспериментах напряжению на электродах. Распределения для тех же полей, что и на фиг. 2, но полученные теперь уже линейным методом, приведены на фиг. 7.

Недостаток этого метода состоит в том, что на первые каналы влияет ошибка из-за идущих от динодов ложных импульсов, имеющих амплитудное распределение, которое искажает распределение фотоотсчетов при малых значениях A . Динодный шум, как и послеимпульсные эффекты, можно значительно уменьшить подходящим выбором фотоумножителя.

§ 4. Ошибки и пределы применимости СФО

4.1. *Ошибки, обусловленные ограниченностью числа отсчетов.* Оценим ошибки, возникающие из-за ограниченности числа отсчетов, зарегистрированных в каждом канале. Для простоты рассмотрим нелинейный метод, который является более наглядным. Для каждого каналового числа n результатом наших измерений

является число $p(n)$ событий за все время измерения. Это число определяет «среднюю» вероятность $Cp(n)$ регистрации n фотоэлектронов, так что после нормировки получаем

$$C \sum_{n=0}^{\infty} p(n) = 1.$$

Каждому значению $p(n)$ соответствует средняя ошибка, равная квадратному корню из числа измерений

$$\langle \delta p^2 \rangle \equiv \varepsilon^2(n) = p(n), \quad (4.1)$$

и относительная ошибка

$$\tilde{\varepsilon}(n) = \frac{\varepsilon(n)}{p(n)} = \frac{1}{\sqrt{p(n)}}. \quad (4.2)$$

Рассматривая $\varepsilon(n)$ как набор нескоррелированных статистических переменных с нулевыми средними значениями и дисперсиями, определяемыми выражением (4.1), т. е.

$$\begin{aligned} \langle \delta p(n) \delta p(n') \rangle &= p(n) \delta_{nn'}, \\ \delta_{nn'} &= \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq n', \\ 1 & \text{при } n = n', \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

где скобки означают усреднение по ансамблю, разложим k -й момент $M_k = \sum n^k p(n) / \sum p(n)$ распределения фотоотсчетов по первым степеням ошибок $\varepsilon(n)$. В результате для средней ошибки k -го момента получаем следующие уравнения:

$$\varepsilon_{M_k}^2 = \langle \delta M_k^2 \rangle = \frac{M_{2k} - M_k^2}{M_0}, \quad (4.4)$$

где $M_0 \equiv \sum p(n)$ есть полное число измерений и относительная ошибка равна

$$\tilde{\varepsilon}_{M_k} \equiv \frac{\varepsilon_{M_k}}{M_k} = \frac{1}{M_k} \sqrt{\frac{M_{2k} - M_k^2}{M_0}}. \quad (4.5)$$

В табл. 1 приведены ошибки для первых трех моментов статистических распределений, представленных на фиг. 2.

Таблица 1

Моменты и соответствующие ошибки статистических распределений фиг. 2 [16]

	$M_1 = \langle C \rangle$ ¹⁾		$M'_2 = \langle C^2 \rangle - \langle C \rangle^2$		$M_3 = \langle C^3 \rangle$		Ожидаемые экспериментальные ошибки ³⁾		
	Эксп. ³⁾	Теор. ²⁾	Эксп.	Теор. ²⁾	Эксп.	Теор. ²⁾	$M_1, \%$	$M_2, \%$	$M_3, \%$
L	$n_L = 1,286$	—	1,301	1,286	8,435	8,375	0,43	1,58	1,1
G	$n_G = 1,202$	—	2,633	2,647	—	—	0,63	2,55	—
S	2,524	2,488	6,846	7,025	92,32	98,56	1,1	3,4	10,6

¹⁾ Значения M_1 и M_3 рассчитываются относительно нуля; M'_2 рассчитывается относительно центра для получения дисперсии.

²⁾ Теоретические значения рассчитаны с использованием соответственно распределения Пуассона для L, геометрического распределения для G и соотношений (2.18) для суперпозиционного поля S, т. е. $M_1 = n_L + n_G$, $M'_2 = n_L + n_G(1 + n_G) + 2n_L n_G$ и т. д. для моментов высших порядков.

³⁾ Вычисления для n_L и n_G проведены с учетом числа отсчетов на один канал, как показано на фиг. 2, а для суперпозиционного распределения — с помощью соотношений между M_1 , M_2 , M_3 и n_L , n_G .

4.2. Измерение малых флуктуаций. Рассмотрим теперь проблему обнаружения малых флуктуаций интенсивности на фоне амплитудно-стабилизированного светового пучка. В наших экспериментах эта проблема возникла в связи с анализом шума, смешанного с одномодовым лазерным полем. В общем случае — это проблема обнаружения передаваемого с помощью лазерного луча сигнала малой амплитуды в присутствии дробового шума в коммуникационном канале или после прохождения через среду, подверженную слабым флуктуациям (изучение турбулентности).

Пусть измеряемое распределение фотоотчетов представляет собой смешанное распределение Пуассона, т. е. распределение Пуассона, у которого ожидаемое среднее N принимает значения в соответствии со статистической функцией распределения $Q(N)$ и время когерентности много больше времени наблюдения T . При

таким предположением можно записать

$$p(n) = \int_0^{\infty} \frac{N^n e^{-N}}{n!} Q(N) dN, \quad (4.6)$$

где

$$N = N_0(1 + m) \quad (4.6a)$$

и $m \ll 1$ — малый флуктуационный член, который мы хотим обнаружить. Используя метод характеристической функции, нетрудно связать моменты $\langle N^k \rangle$ неизвестной физической функции распределения с измеряемыми моментами $M_k = \sum n^k p(n) / \sum p(n)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= M_1, \\ \langle N^2 \rangle &= M_2 - M_1, \\ \langle N^3 \rangle &= M_3 - 3M_2 + 2M_1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

и т. д.

Из уравнений (4.7) можно, например, вывести минимально различимые значения первых двух моментов $\langle m \rangle$ и $\langle m^2 \rangle$ флуктуационного члена m . Они определяются выражениями

$$\begin{aligned} \langle m \rangle_{\min} &= \frac{1}{\sqrt{N_0 M_0}}, \\ \langle m^2 \rangle_{\min} &= \frac{1}{\sqrt{M_0}} \sqrt{\frac{4}{N_0} + \frac{6}{N_0^2} + \frac{2}{N_0^3}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Первое из этих выражений получено из первого уравнения (4.7), согласно которому

$$\langle m \rangle = \frac{M_1}{N_0} - 1.$$

Минимальное значение $\langle m \rangle$, которое еще можно измерить, равно ошибке правой части этого соотношения. Из уравнения (4.4) видно, что ошибка при измерении M_1 зависит от M_2 . Поскольку нас интересуют малые по сравнению с несущим сигналом флуктуации, то для дисперсии можно в хорошем приближении использовать распределение Пуассона, т. е.

$$M_2 - M_1^2 = M_1 \approx N_0.$$

Следовательно,

$$\epsilon_{M_1} = \sqrt{\frac{M_2 - M_1^2}{M_0}} = \sqrt{\frac{N_0}{M_0}}$$

и

$$\langle m \rangle_{\text{мин}} = \frac{\epsilon_{M_1}}{N_0} = \frac{1}{\sqrt{N_0 M_0}}$$

в соответствии с первым из соотношений (4.8).

Аналогично если флуктуационное возмущение имеет нулевое среднее значение, то из второго уравнения (4.7) получаем

$$\langle m^2 \rangle = \frac{M_2 - M_1}{N_0^2} - 1$$

и, повторяя рассуждения об ошибке измерения, приходим ко второму соотношению (4.8).

Из (4.8) следует, что точность можно повысить путем увеличения либо среднего числа фотоэлектронов N_0 за одно измерение, либо полного числа измерений M_0 . Что касается измерения $\langle m \rangle_{\text{мин}}$, то предельная точность зависит от полного числа $N_0 M_0$ зарегистрированных фотоэлектронов. Нелинейный метод, хотя и требует использования малых значений N_0 , допускает благодаря стабильности цифровой техники очень большие значения M_0 , т. е. большое полное время измерения. В линейном методе, наоборот, длительность эксперимента ограничена вследствие дрейфа усиления фотоэлемента или усилителей, так что M_0 имеет верхний предел. Вместе с тем благодаря отсутствию эффектов мертвого времени величина N_0 может быть очень большой.

Из приведенного выше рассмотрения следует, что нелинейный метод более удобен при малых скоростях счета фотоэлектронов, но при этом во избежание эффектов мертвого времени требуется, чтобы времена измерения были больше 1 мкс. Линейный метод применим при высоких скоростях счета фотоэлектронов и в случаях, когда времена измерения должны быть меньше 1 мкс. При использовании этого метода для детального анализа моментов высшего порядка требуется тщательное измерение одноэлектронной статистики. В разд. 6.3

линейный метод будет применен к эксперименту в переходном режиме, где используются времена измерения, равные 50 нс, и среднее число электронов заключено в интервале между 30 и 60.

4.3. Сравнение СФО и корреляционных функций $G^{(n)}$. В § 1 мы показали, как с помощью цепочки совместных функций распределения фотоотсчетов

$$W_k(n_1 t_1, n_2 t_2, \dots, n_k t_k)$$

можно восстановить вид оператора плотности поля ρ . В частности, для марковского процесса мы можем ограничить измерения значением $k=2$. Укажем здесь кратко на связь между СФО и цепочкой корреляционных функций, определенных соотношением (1.1). Из теории Глаубера [2,9] известно, что для широкополосного точечного детектора, измеряющего стационарное поле, присоединенная характеристическая функция имеет вид

$$Q(\lambda, T) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_0^T \dots \dots \int_0^T G^{(n)}(t_1 \dots t_n; t_n \dots t_1) dt_1 \dots dt_n. \quad (4.9)$$

Ограничимся рассмотрением этого выражения при равных временах $t_1 = t_2 = \dots = t_n = t$ (это эквивалентно утверждению, что T много меньше времени когерентности). Из соотношения (1.11) имеем

$$G^{(n)}(t, \dots, t) = \int (\mathcal{E}^{(-)}(\alpha, t))^n (\mathcal{E}^{(+)}(\alpha, t))^n W_1(\alpha, t) d^2\alpha. \quad (4.10)$$

Взяв теперь k -ю производную от Q по λ , мы видим, что между k -м факториальным моментом СФО и k -м моментом функции распределения по ансамблю W_1 имеется соответствие (поскольку амплитуды \mathcal{E} линейны по α).

Отметим, что выражение (4.10) содержит пару комплексных переменных $\mathcal{E}^{(-)}$, $\mathcal{E}^{(+)}$, взятых в один и тот же момент времени. Они представляют собой интен-

сивность в этот момент времени. Другими словами, соотношение типа (4.10) описывает корреляцию интенсивности и не дает никакой информации о фазовых корреляциях поля. Это объясняется принятым упрощающим предположением о широкополосности детектора. В самом деле, выражение (4.9) является частным случаем выражения (17.21) работы [2], которое для точечного детектора можно записать следующим образом:

$$Q(\lambda, T) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_0^T \dots \int_0^T G^{(n)}(t'_1 \dots t'_n, t''_1 \dots t''_n) \prod_{j=1}^n S(t''_j - t'_j) dt'_j dt''_j, \quad (4.11)$$

где функция $S(t''_j - t'_j)$ описывает временное запаздывание детектора и является обратным преобразованием Фурье его частотного отклика. Когда S принимает вид δ -функции, выражение (4.11) переходит в (4.9). При значении T , много меньшем времени когерентности, $G^{(n)}$ принимает вид

$$G^{(n)}(t' \dots t', t'' \dots t'') = \int (\mathcal{E}^{(-)}(\alpha', t'))^n (\mathcal{E}^{(+)}(\alpha'', t''))^n \times \\ \times W_2(\alpha' t', \alpha'' t'') d^2 \alpha' d^2 \alpha'', \quad (4.12)$$

и мы видим, что эта величина содержит информацию об относительной фазе. Узкополосный детектор возникает в результате соединения интерферометра с высоким разрешением и обычного фотоэлемента. Мы обсудим это ниже в связи с вопросом о фазовом шуме лазера (§ 6).

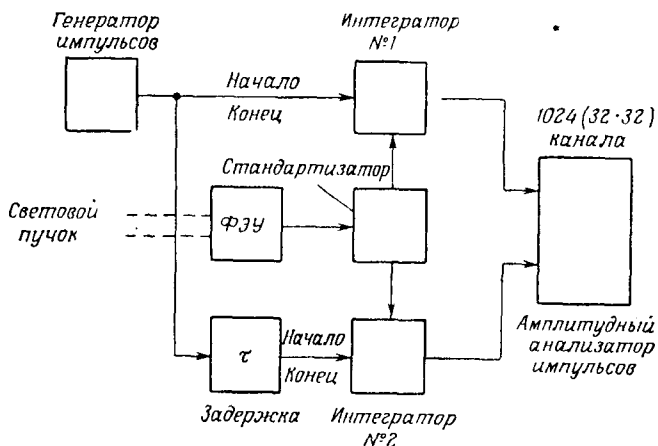
Если, возвращаясь к широкополосному детектору, измерить СФО за время, сравнимое с временем флуктуации поля, то в общем случае получаем

$$\langle n(n-1) \dots (n-k+1) \rangle = \\ = \int_0^T \dots \int_0^T G^{(k)}(t_1 \dots t_k; t_k \dots t_1) dt_1 \dots dt_k.$$

Следовательно, мы имеем корреляционные функции, *сглаженные* за время усреднения. Если вместо этого использовать совместные функции распределения фотоотсчетов, то можно проследить за временным поведением корреляционных функций, *не сглаживая* их. Это показано в следующем параграфе, где вводится многомерная производящая функция.

§ 5. Совместные функции распределения фотоотсчетов [12]

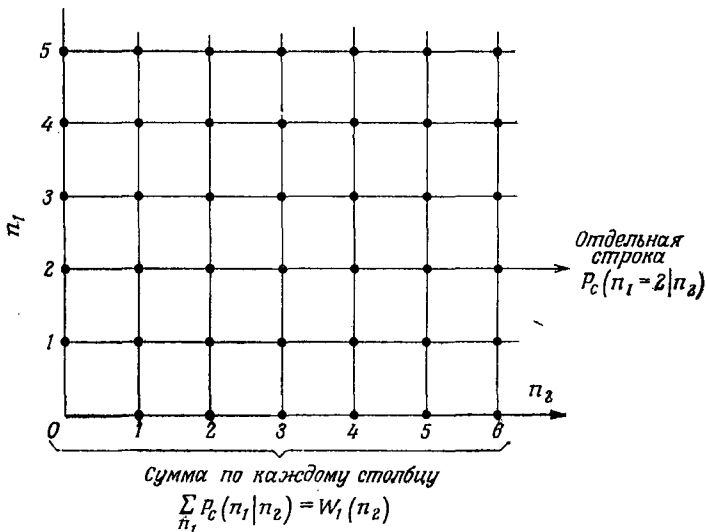
С помощью одной функции распределения $p(n, T)$ мы получаем только интегральную информацию о временной эволюции поля. Один из способов измерения



Фиг. 8. Экспериментальная установка для измерения совместной функции распределения фотоотсчетов.

временной эволюции мог бы состоять в измерении СФО для все возрастающих времен T вплоть до характерных (или даже больших) времен релаксации поля и последующей корреляции различных видов функций распределений фотоотсчетов. Такое рассмотрение было проведено теоретически для гауссова поля, эволюционирующего как марковский процесс (с лоренцевым спектром) [26, 27].

Для интерпретации результатов лучше всего отдельные наблюдения, каждое из которых сделано за время T , много меньшее времени когерентности, коррелировать



Фиг. 9. Матрица чисел на выходе (каждое из которых обозначено точкой) в том виде, как они печатаются на цифровом выходе многоканального анализатора.

Числа на данной линии (например, в строке $n_1=2$) дают условную функцию распределения.

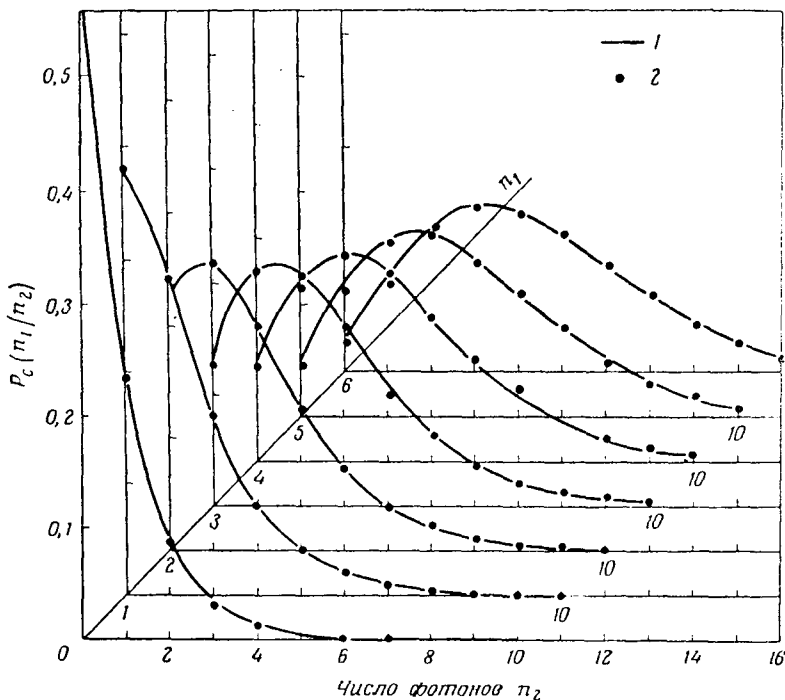
[12], как показано на схеме эксперимента (фиг. 8). Существенно то, что описанная выше операция повторяется дважды в моменты времени t_1 и t_2 и оба результата посылаются в двумерный многоканальный анализатор импульсов. Результаты записываются в виде двумерной матрицы, которая дает совместную функцию распределения фотоотсчетов $W_2(n_1t_1, n_2t_2)$.

Определив условную вероятность фотоотсчета P_c соотношением

$$W_2(n_1t_1, n_2t_2) = P_c(n_1t_1|n_2t_2) W_1(n_1t_1),$$

нетрудно понять, что функция P_c задается строкой (определяемой выбранным значением n_1) (фиг. 9) и

является симметричной по индексам 1 и 2 для всех стационарных процессов. Предельное распределение $W_1(n_1) = W_1(n_2)$, соответствующее нескоррелированному эксперименту описанного ранее типа, получается



Фиг. 10. Условные вероятности фотоотсчетов для гауссова поля с временем когерентности 700 мкс и временем задержки 30 мкс ($|g^{(1)}(\tau)|^2 = 0,925$).

Каждая кривая имеет единичную площадь; $\langle n \rangle = 1,7$. 1 — теоретические кривые; 2 — экспериментальные точки.

суммированием в каждом столбце (строке) значений, соответствующих всем строкам (столбцам), относящимся к этому столбцу (строке). На фиг. 10 и 11 приведены экспериментальные результаты для стационарного гауссово-марковского поля вместе с теоретическими кривыми, полученными путем следующих рассуждений. Определив совместную функцию распределе-

ния поля в представлении Глаубера посредством формулы [см. выражение (1.17)]

$$W_2(\mathcal{E}_1 t_1, \mathcal{E}_2 t_2) = \\ = \int P(\{\alpha_k\}) \delta^{(2)}[\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}(t_1, \{\alpha_k\})] \delta^{(2)}[\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}(t_2, \{\alpha_k\})] \prod_k d^2 \alpha_k,$$

в случае стационарного гауссова поля нетрудно получить

$$W_2(\mathcal{E}_1 0, \mathcal{E}_2 \tau) = \frac{1}{\pi^2 \langle n \rangle^2 (1 - |g^{(1)}(\tau)|^2)} \exp \times \\ \times \left[- \frac{|\mathcal{E}_1|^2 + |\mathcal{E}_2|^2 - 2 \operatorname{Re} \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2^* |g^{(1)}(\tau)|^2}{\langle n \rangle (1 - |g^{(1)}(\tau)|^2)} \right], \quad (5.1)$$

где $\langle n \rangle = G^{(1)}(t, t) T$ — среднее число фотоотсчетов за время наблюдения (для простоты квантовый выход принят равным единице) и $|g^{(1)}(\tau)| = \exp[-\beta\tau]$ — нормированная автокорреляционная функция в марковском случае. Как и для функций распределения первого порядка, мы можем определить здесь производящую функцию в виде следующего среднего по совместной функции распределения фотоотсчетов:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \langle (1 - \lambda_1)^{n_1} (1 - \lambda_2)^{n_2} \rangle. \quad (5.2)$$

Нетрудно показать, что Q выражается через совместную функцию распределения с помощью формулы

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \int \exp[-\lambda_1 |\mathcal{E}_1|^2 T] \exp[-\lambda_2 |\mathcal{E}_2|^2 T] \times \\ \times W_2(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) d^2 \mathcal{E}_1 d^2 \mathcal{E}_2, \quad (5.3)$$

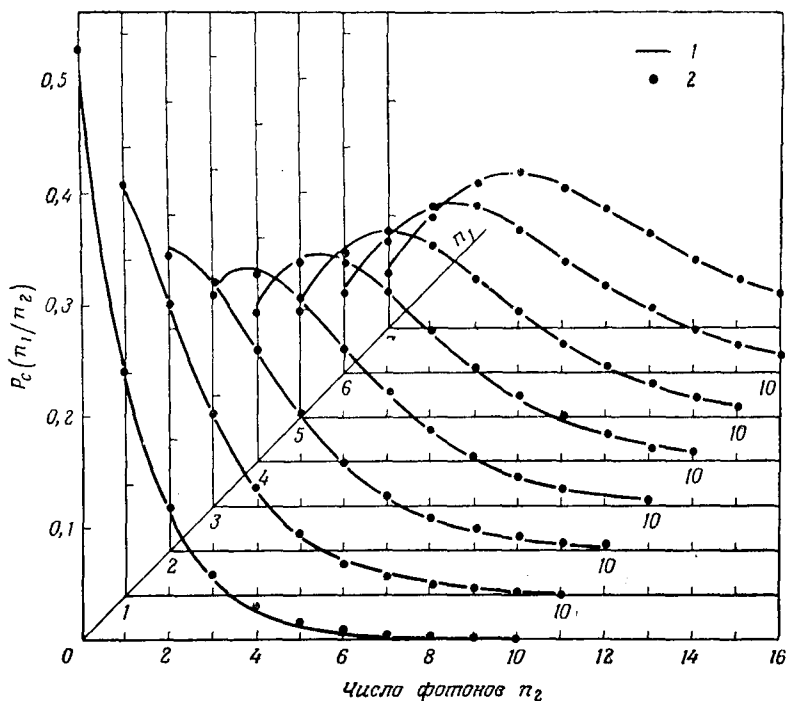
которая позволяет связать поле с функцией распределения фотоотсчетов с помощью соотношения

$$W_2(n_1 t_1, n_2 t_2) = \frac{(-1)^{n_1+n_2}}{n_1! n_2!} \frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial \lambda_1^{n_1} \partial \lambda_2^{n_2}} Q(\lambda_1, \lambda_2) \Big|_{\lambda_1=\lambda_2=1}. \quad (5.4)$$

Подстановка (5.1) в (5.3) дает

$$Q(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{1 + (\lambda_1 + \lambda_2) \langle n \rangle + \lambda_1 \lambda_2 \langle n \rangle^2 [1 - \exp[-2\beta\tau]]}. \quad (5.5)$$

При $\tau \rightarrow \infty$ это выражение можно представить в виде произведения двух независимых производящих функций



Фиг. 11. Условные вероятности фотоотсчетов для того же поля, что и на фиг. 10, с временем задержки $\tau = 150$ мкс ($|g^{(1)}(\tau)|^2 = 0,65$). Подобные измерения с временем задержки $\tau = 2500$ мкс дают набор идентичных геометрических (бозевских) функций распределения, подобных представленным на фиг. 2. Этого следует ожидать, поскольку $P_c(n_1, 0 | n_2, \tau) \rightarrow W_1(n_2)$ при $\tau \rightarrow \infty$; $(n) = 2,0$.

1 — теоретические кривые, 2 — экспериментальные точки.

для геометрических распределений. С помощью (5.4) находим, что $W_2(n_1, 0, n_2, \tau)$ имеет вид

$$W_2(n_1, 0, n_2, \tau) = \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! n_2!} \frac{(\langle n \rangle B)^{n_1 + n_2}}{A^{n_1 + n_2 + 1}} {}_2F_1(-n_1; -n_2; -n_1 - n_2; 0), \quad (5.6)$$

где

$$\begin{aligned} A &= 1 + 2\langle n \rangle + \langle n \rangle [1 - \exp[-2\beta\tau]], \\ B &= 1 + \langle n \rangle [1 - \exp[-2\beta\tau]], \\ C &= \frac{A}{B^2} [1 - \exp[-2\beta\tau]] \end{aligned} \quad (5.7)$$

и ${}_2F_1$ — гипергеометрическая функция Гаусса [28]. Например, при $\tau = 0$ (полностью коррелированные измерения) получаем

$$W_2(n_1 0, n_2 0) = \frac{(n_1 + n_2)!}{n_1! n_2!} \frac{\langle n \rangle^{n_1 + n_2}}{(1 + 2\langle n \rangle)^{n_1 + n_2 + 1}}, \quad (5.8)$$

тогда как при $\tau \rightarrow \infty$ мы имеем, очевидно, произведение двух геометрических распределений для отсчетов n_1 и n_2 соответственно. Как видно из фиг. 10 и 11, совпадение теоретических кривых и экспериментальных точек находится в пределах ошибки эксперимента.

Возможности применения изложенного метода очень широки и не ограничиваются случаем только что проведенного здесь исследования стационарного гауссова поля. Так, например, вычисление совместных моментов типа $\langle n^k(t_1) n^h(t_2) \rangle$ при $k, h > 1$ важно при исследовании когерентных свойств многократных фотонных процессов. При $k = h = 1$ этот метод представляет собой другой способ измерения функции корреляции интенсивности $\langle n(t_1) n(t_2) \rangle$, которую, однако, легче получить, используя метод временных совпадений [29]¹⁾.

Хаус [30] вычислил отношение сигнала к шуму для СФО и метода временных корреляций. Для времен счета $T \approx \tau_c$ статистика фотоотчетов оказалась менее пригодной. Однако рассмотрение Хауса было ограничено только одномерным экспериментом по фотосчету, которому присущ описанный выше эффект сглаживания вследствие интегрирования по времени. Двумерный эксперимент по СФО свободен от этого эффекта.

¹⁾ В настоящее время имеются работы по измерению тройного коррелятора вида $\langle n(t_1) n(t_2) n(t_3) \rangle$ [54]. — *Прим. ред.*

§ 6. Статистические свойства лазерного излучения

6.1. *Обзор теории*¹⁾. В качестве иллюстрации приложения СФО мы приведем ряд экспериментов по исследованию статистических свойств лазерных систем как в стационарном, так и в переходном режимах. Теория лазера изложена в этой школе Скалли, Хакеном и Вайдлихом и Гордоном. Поэтому мы опустим все тонкие теоретические вопросы, связанные с работой лазера, а изложим только результаты вычислений и дадим некоторые качественные объяснения.

Рассмотрим прежде всего гармонический осциллятор с затуханием. Его статистическое поведение можно описать с помощью уравнения Ланжевена, которое во вращающейся системе координат (т. е. после преобразования $\alpha \rightarrow \alpha \exp[-i\omega t]$) принимает вид

$$\dot{\alpha} + \gamma\alpha = \Gamma(t). \quad (6.1)$$

Здесь $\alpha(t)$ — комплексная амплитуда осциллятора, γ — константа затухания и $\Gamma(t)$ — случайный шумовой источник. Пусть $\Gamma(t)$ описывает комплексный стационарный гауссов процесс со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \langle \Gamma(t) \rangle &= 0, \\ \langle \Gamma^*(0) \Gamma(\tau) \rangle &= Q\delta(\tau). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Для получения условной вероятности $P(\alpha_0 | \alpha t)$ мы должны решить соответствующее уравнению (6.1) двумерное уравнение Фоккера — Планка, которое имеет вид²⁾

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \gamma \operatorname{div}_\alpha (\alpha P) = q \nabla_\alpha^2 P, \quad (6.3)$$

¹⁾ Эти основанные на классическом уравнении Фоккера — Планка эвристические соображения качественно объясняют СФО и поведение соответствующих корреляционных функций. Конечно, квантовая природа лазерного шума (см. работы [7, 8, 54]) в этой простейшей модели не выявляется. Основанные на методах Ланжевена и Фоккера — Планка самосогласованные модели лазера развивались школой Хакена и Лэксом (библиографию см. в работах [7, 8, 54]). Здесь мы следуем в основном раннему полуклассическому рассмотрению [31].

²⁾ Классическое рассмотрение уравнения Фоккера — Планка можно найти в работах [6, 32].

где $q = Q/4$. Его полное решение записывается следующим образом:

$$P(\alpha_0 0 | \alpha t) = \frac{1}{\pi \sigma^2(t)} \exp \left[- \frac{|\alpha - \alpha_0 e^{-\gamma t}|^2}{\sigma^2(t)} \right], \quad (6.4)$$

где

$$\sigma^2(t) = \frac{2q}{\gamma} (1 - \exp[-2\gamma t]).$$

В пределе $t \rightarrow \infty$ мы получаем абсолютную плотность вероятности первого порядка

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\alpha_0 0 | \alpha t) \equiv W_1(\alpha) = \frac{1}{\pi 2q/\gamma} \exp \left[- \frac{|\alpha|^2}{2q/\gamma} \right]. \quad (6.5)$$

С помощью уравнения (6.3) мы описали, следовательно, амплитуду осциллятора как стохастический марковский процесс, у которого функция распределения по ансамблю является гауссовой, с дисперсией $\langle n \rangle = 2q/\gamma$, и частотный спектр имеет лоренцеву форму с полушириной $\Delta\omega = \gamma$ (т. е. корреляционная функция первого порядка экспоненциально затухает во времени с временной постоянной $1/\gamma$). Мы выяснили, таким образом, физический смысл двух параметров линейного уравнения Фоккера — Планка и можем утверждать, что уравнение (6.3) описывает динамику хаотического одномодового поля с лоренцевым спектром.

Этот анализ можно применить к одномодовому лазерному полю, рассматривая его как осциллятор, у которого затухание скомпенсировано усилением G , возникающим из-за наличия в резонаторе возбужденных атомов. Соответствующее уравнение Ланжевена имеет вид ¹⁾

$$\dot{\alpha} + (\gamma - G)\alpha = \Gamma(t). \quad (6.6)$$

В общем случае член G зависит от поля, но в первом приближении его можно считать постоянным, $G = g_0$.

¹⁾ Перечислим главные предположения, использованные при этом простейшем рассмотрении: двухуровневые атомы, точная настройка резонатора на центр атомной линии, адиабатическое исключение атомных переменных, низший (кубический) порядок нелинейности, неподвижность атомов. И все же, несмотря на все эти упрощения, имеющиеся в настоящее время эксперименты качественно объяснимы.

В этом случае по-прежнему справедливы решения (6.4) и (6.5), в которых нужно просто заменить γ на $\gamma - g_0$. Следовательно, поле имеет типичное для гауссовых источников распределение, и единственное отличие заключается в *сужении линии*. Более реалистическая картина получается при рассмотрении зависимости G от $|\alpha|^2$ (кубическая нелинейность в наведенном дипольном моменте), т. е.

$$G = g_0 - \beta |\alpha|^2. \quad (6.7)$$

Уравнение Ланжевена преобразуется к виду

$$\dot{\alpha} - \beta (d - |\alpha|^2) \alpha = \Gamma(t), \quad (6.8)$$

где линейное отрицательное затухание $bd = g_0 - \gamma$ получается из линейной теории, а $\beta |\alpha|^2$ — первая нелинейная поправка. Уравнение Фоккера — Планка принимает теперь форму

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \beta \operatorname{div}_\alpha [(d - |\alpha|^2) \alpha P] = q \nabla_\alpha^2 P. \quad (6.9)$$

Если положить $\alpha = r \exp[i\varphi]$, то уравнение Фоккера — Планка можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \beta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [(d - r^2) r^2 P] = \\ = q \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.9a)$$

Стационарное решение этого уравнения не зависит от φ и имеет вид

$$P(r) = N \exp \left[-\frac{\beta}{4q} r^4 + \frac{\beta}{2q} dr^2 \right]. \quad (6.10)$$

Удобно ввести параметр накачки a (Рискен в [31])

$$a = \sqrt{\frac{\beta}{q}} d \quad (6.11)$$

и нормировать квадрат модуля как

$$x^2 = \sqrt{\frac{\beta}{q}} r^2. \quad (6.12)$$

В результате функция распределения $P(r)$ запишется в виде

$$P(x) = N \exp\left[-\frac{x^2}{4} + \frac{ax^2}{2}\right]. \quad (6.13)$$

Определим пороговую точку из условия $\gamma = g_0$, т. е. как такую точку, где линейное усиление равно потерям. На пороге

$$d = a = 0.$$

Ниже порога ($a < 0$) распределение (6.13) имеет пик при $x = 0$, тогда как выше порога ($a > 0$) пик этого распределения расположен в точке $x = \sqrt{a}$. Нетрудно показать, что вне интервала $-10 < a < 10$ вблизи порога справедливы следующие приближения.

а) *Значительно ниже порога* ($a < -10$). В этом случае (6.13) сводится к выражению

$$P(r) \approx N \exp\left[-\frac{|a|x^2}{2}\right] = N \exp\left[-\frac{\beta|d|}{2q} r^2\right], \quad (6.14)$$

которое представляет собой гауссово распределение с центром в точке $r = 0$ и с дисперсией, равной (фиг. 14 при $a < 0$)

$$\langle n \rangle = \frac{2q}{\beta|d|}. \quad (6.15)$$

б) *Значительно выше порога* ($a > 10$). Насыщение становится большим и стремится стабилизировать амплитуду поля вблизи ее среднего значения

$$\langle x \rangle = \sqrt{a}.$$

Обозначим теперь

$$x = \sqrt{a}(1 + \varepsilon), \quad (6.16)$$

где $\varepsilon \ll 1$ — малый флуктуационный член. Для x^2 получаем следующее выражение:

$$x^2 = a(1 + 2\varepsilon).$$

Подставляя его в (6.13), находим

$$P(\varepsilon) = N' \exp[-a^2\varepsilon^2],$$

или

$$P(x) = N' \exp[-a(x - \sqrt{a})^2]. \quad (6.17)$$

Мы получили гауссово распределение с центром в точке $x = \sqrt{a}$ и с дисперсией, равной

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{q}{\beta}}. \quad (6.18)$$

Определяемая выражениями (6.14) и (6.17) функция $P(\alpha)$ описывает только распределение модуля амплитуды поля. Вычислим теперь временную эволюцию поля в этих же двух предельных случаях.

а) *Значительно ниже порога.* Уравнение (6.8) сводится к (6.3), где теперь $\gamma = \beta|d|$. Решение задается выражением (6.4), и для корреляционных функций поля и интенсивности мы получаем соответственно следующие формулы:

$$\begin{aligned} G^{(1)}(\tau) &\equiv \langle \alpha^*(\tau) \alpha(0) \rangle = \\ &= \frac{2q}{\beta|d|} \exp[-\beta|d|\tau], \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\tau) &\equiv \langle |\alpha(\tau)|^2 |\alpha(0)|^2 \rangle = \\ &= \langle |\alpha(0)|^2 \rangle + \\ &+ \left(\frac{2q}{\beta|d|} \right)^2 \exp[-2\beta|d|\tau]. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Фиг. 12. Константа затухания $\lambda^{(2)}$ корреляционной функции интенсивности $G^{(2)}$ в зависимости от параметра накачки a .

Пунктирная кривая соответствует линеаризованной теории [$a < 0$ — формула (6.20); $a > 0$ — формула (6.27)]. Сплошная кривая соответствует главной константе затухания точного решения.

Фурье-образы этих выражений дают спектры флуктуаций фазы поля и интенсивности. Эти спектры имеют лоренцеву форму и полуширины $\lambda^{(1)} = \beta|d|$ и $\lambda^{(2)} = 2\beta|d|$ соответственно. Зависимость этих полуширин от параметра a представлена на фиг. 12 и 13 при $a < 0$.

б) *Значительно выше порога.* Функция распределения поля имеет в точке \sqrt{d} острый максимум, и, следовательно, мы можем записать модуль поля в виде

$$r = \sqrt{d} + r_1,$$

где r_1 — малая флуктуация. Используя теорию возмущений, условную функцию распределения поля можно представить в виде произведения функций распределения, зависящих только от модуля и фазы амплитуды поля:

$$P(\alpha 0 | \alpha' \tau) = R(r_1, 0 | r'_1, \tau) \Phi(\varphi 0 | \varphi' \tau). \quad (6.21)$$

Уравнение (6.9) распадается на следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} &= 2\beta d \frac{\partial}{\partial r_1} (r_1 R) + q \frac{\partial^2 R}{\partial r_1^2}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{q}{d} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi_1^2} &= 0. \end{aligned} \quad (6.22)$$

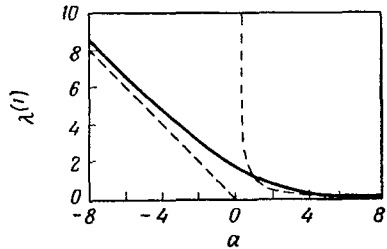
Первое из них представляет собой линейное уравнение Фоккера — Планка, решение которого уже определено выражением (6.4); иными словами, лазерное поле представляет собой линейную суперпозицию когерентного поля с амплитудой \sqrt{d} и гауссового поля с нулевым средним значением амплитуды, средним значением числа фотонов

$$\langle n \rangle = \frac{q}{2\beta d} \quad (6.23)$$

и константой затухания, возрастающей линейно с увеличением d , т. е.

$$L\omega = 2\beta d. \quad (6.24)$$

Второе уравнение есть уравнение диффузии, решение которого содержит диффузионную константу q/d , обратно пропорциональную мощности генерации (формула Таунса для мазера) (см. фиг. 13 при $a > 0$ ¹⁾).



Фиг. 13. Константа затухания $\lambda^{(1)}$ корреляционной функции поля $G^{(1)}$ в зависимости от a .

Пунктирные и сплошные кривые имеют тот же смысл, что и на фиг. 12. Ветвь гиперболы при $a > 0$ соответствует формуле Таунса, которая следует из (6.25).

¹⁾ Квантовая ширина линии генерации газового лазера измерялась в работах [69—71]. — Прим. ред.

Соответствующие моменты имеют вид

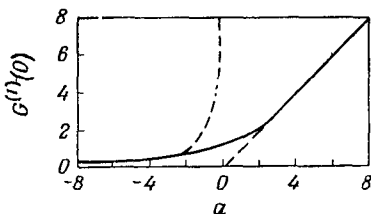
$$\begin{aligned} \langle r(t+\tau)r(t) \rangle &= d + \frac{q}{2\beta d} (\exp[-2\beta d\tau] - 1), \\ \langle \exp[-i\varphi(t+\tau)] \exp[i\varphi(t)] \rangle &= \exp\left[-\frac{q}{d}\tau\right], \end{aligned} \quad (6.25)$$

а корреляционные функции записываются как

$$\begin{aligned} G^{(1)}(\tau) &= d \exp\left[-\frac{q}{d}\tau\right] - \\ &\quad - \frac{q}{2\beta d} \exp\left[-\frac{q}{d}\tau\right] (1 - \exp[-2\beta d\tau]), \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$K(\tau) \equiv G^{(2)}(\tau) - (\langle |\alpha(0)|^2 \rangle)^2 = \frac{2q}{\beta} \exp[-2\beta d\tau]. \quad (6.27)$$

Корреляционная функция для поля состоит из двух частей: первая имеет узкую ширину линии q/d и большую интенсивность, тогда как вторая имеет большую ширину линии $2\beta d$ и малую интенсивность.



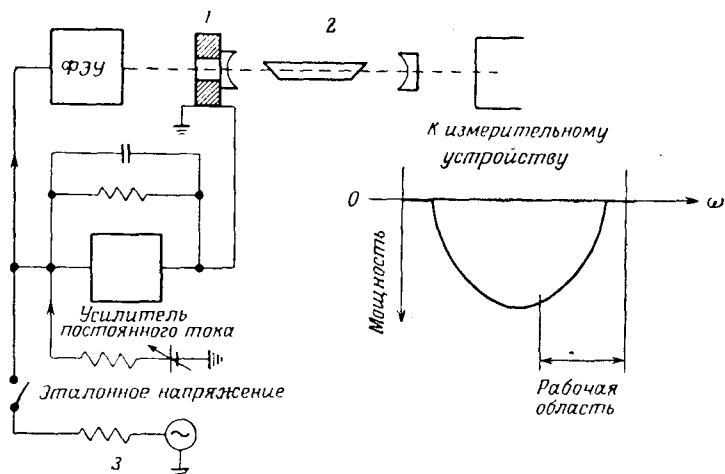
Фиг. 14. Зависимость $G^{(1)}(0)$ от α .

Пунктирные кривые соответствуют формулам (6.19) ($\alpha < 0$) и (6.26) ($\alpha > 0$). Сплошная кривая соответствует точному решению.

в) *Порог генерации.* До сих пор мы обсуждали только режимы гораздо выше и гораздо ниже порога генерации. Характеристики излучения в пороговой области не могут быть получены простой экстраполяцией предыдущих результатов, и поэтому нужно найти точное решение уравнения (6.9).

Обратимся к теоретическим расчетам Рискена [31] и Лэкса и Люиселла [31]. Их решения представлены на фиг. 12—14 в виде сплошных линий, а затем приведены снова для сравнения с экспериментальными результатами (фиг. 17—20). Видно, что в отличие от упрощенной линейной картины никаких разрывов непрерывности здесь не возникает.

6.2. Эксперименты в стационарном режиме (распределения по ансамблю и временные корреляции)¹⁾ [34, 35]. В этом разделе описываются экспериментальные результаты, получаемые с помощью метода СФО при изучении статистики электромагнитного поля стабилизированного лазера, работающего в различных условиях. Использовался гелий-неоновый лазер с длиной



Фиг. 15. Экспериментальная установка для измерения вблизи порога гауссова шума, смешанного с лазерным излучением.

1 — пьезокерамический диск; 2 — лазер длиной 20 см, внутренний диаметр 1 мм; 3 — нестандартный привод переменного тока для контроля рабочей области.

волны 6328 Å; разряд возбуждался постоянным током, конфокальный резонатор имел длину 20 см и число Френеля ~ 1 , что обеспечивало существование только одной ТЕМ₀₀-моды. Одно из зеркал крепилось на пьезокерамическом диске (фиг. 15). Главная проблема заключалась в отделении истинно квантового шума, который

¹⁾ Отметим, что высшие моменты функции распределения фотонов и временные корреляторы второго и третьего порядка измерялись методом фотоотсчетов в работах [56—59]. Эти измерения относятся к очень малой окрестности около порога, где относительные флуктуации порядка единицы. Выше порога генерации спектр флуктуаций интенсивности изучался методом гетеродинирования в работах [60—63]. — Прим. ред.

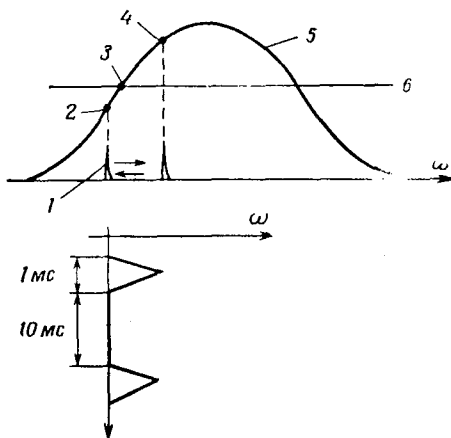
мы хотели измерить, от побочных флуктуаций, обусловленных механическими возмущениями (колебательные или тепловые смещения), звуковыми волнами в воздухе, шумами, связанными с током разряда (плазменные колебания и нестабильность источника питания), и т. п.

Все возмущения в зависимости от их характерных частот можно грубо разделить на два типа: флуктуации, которые могут содержать гармоники той же частоты, что и истинный измеряемый шум, и долговременные сдвиги, которые можно считать почти постоянными.

Возмущения первого типа должны устраняться подходящим выбором окружающих и рабочих условий. Чтобы избавиться от влияния колебаний здания, использовалась бетонная платформа $5 \times 5 \times 5$ м³, лежащая на песчаной подложке. На эту платформу мы поставили шесть бетонных столбов. «Надгробная плита» весом около 1000 кг плавала на шести резиновых камерах, расположенных на вершинах столбов. Лазерный резонатор крепился на прочной инварной раме и помещался на «надгробную плиту». Большое внимание уделялось тому, чтобы избавиться от тепловых флуктуаций вокруг резонатора путем соответствующей экранировки и удаления из комнаты всей электронной аппаратуры (вся аппаратура помещалась в другой комнате и связь с ней осуществлялась с помощью длинного кабеля через отверстие в стене). Во избежание акустических помех комната, в которой находился лазер, освобождалась от всех звуковых источников и, кроме того, лазер покрывался стиропеновым колпаком. Были устранены также режимы разрядного тока, при которых существуют плазменные шумы. Все измерения проводились ночью.

Чтобы добиться высокой точности, мы «приготавливали начальное состояние», т. е. перед каждым актом измерения приводили динамическую систему в нужное состояние следующим образом (фиг. 16). Перед каждым измерением периодический управляющий импульс 1 мс, прикладываемый к пьезокерамике, выводит моду в достаточно удаленную надпороговую точку, где лазерная интенсивность измеряется и сравнивается со стандартной; каждый сигнал ошибки создает постоян-

ное напряжение коррекции в пьезокерамическом механизме подстройки. Мы отделяем таким образом рабочую точку (в которой интенсивность может быть мала, а флуктуации велики) от контрольной точки (в которой интенсивность должна быть велика, а флуктуации



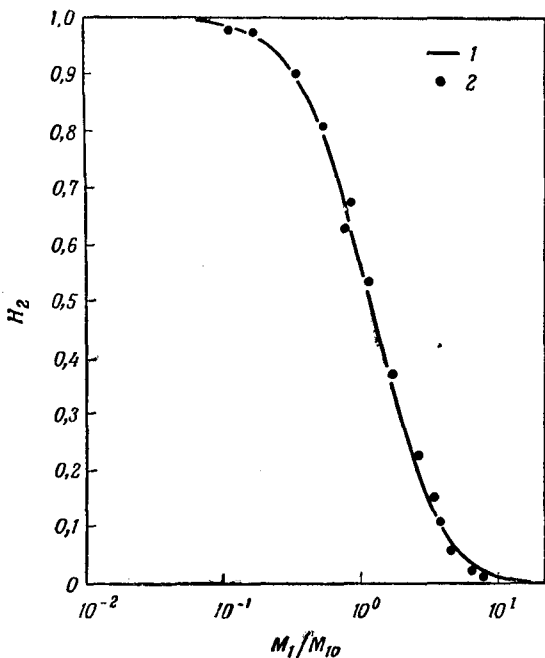
Фиг. 16. Последовательность стабилизирующих операций для рабочей точки, лежащей ниже порога.

Мода сдвигается к расположенной выше порога эталонной точке за 1 мс (это время достаточно велико, чтобы учесть релаксационные процессы в лазере над порогом и инерцию пьезокерамики), а период операций больше 10 мс (с учетом наибольшего времени релаксации вблизи порога). Интервал измерения T выбирался непосредственно перед импульсом 1 мс.

1 — мода резонатора; 2 — точка измерения; 3 — порог; 4 — эталонная точка; 5 — ненасыщенное усиление g_0 ; 6 — уровень потерь γ .

малы), сохраняя фиксированной разность частот между двумя положениями моды резонатора, так что любая коррекция влияет также на рабочую точку. Такой способ контроля приводит, очевидно, к фазовым возмущениям, но для измерения флуктуаций интенсивности с помощью статистики фотоотчетов это несущественно. После каждого управляющего импульса лазерная интенсивность релаксирует к стационарному значению, причем максимальное значение времени релаксации τ вблизи порога равно 140 мкс. Распределения фотоотчетов $p(n)$ измеряются в конце временного интервала $T > 10\tau$. Частота повторения управляющих

импульсов подбирается таким образом, чтобы можно было проводить измерения вдали от области возмущения, вызванного контрольной операцией.

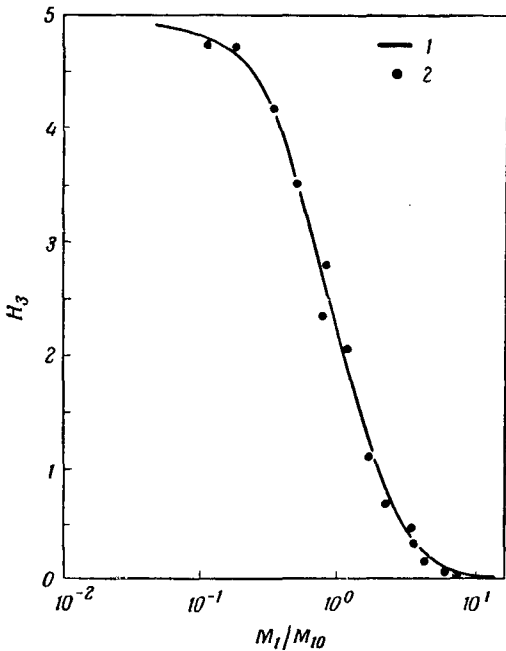


Фиг. 17. Теоретические (1) и измеренные (2) значения приведенного факториального момента второго порядка H_2 в зависимости от нормированной интенсивности M_1/M_{10} в пороговой области.

Измерение величины $p(n)$ производится так, как описано в предыдущих параграфах. Время каждого измерения составляет 1 мкс (меньше, чем наименьшее время когерентности в диапазоне $0,05 < M_1/M_{10} < 15$). Для сравнения эксперимента с теорией использовался второй приведенный факториальный момент распределения фотоотсчетов

$$H_2 = \frac{\langle n(n-1) \rangle}{\langle n \rangle^2} - 1, \quad (6.28)$$

который меняется от 1 (для гауссова распределения поля в области значительно ниже порога генерации) до



Фиг. 18. Теоретические (1) и измеренные (2) значения приведенного факториального момента третьего порядка H_3 в зависимости от нормированной интенсивности M_1/M_{10} в пороговой области.

0 для амплитудно-стабилизированного поля (в далекой надпороговой области), и третий момент

$$H_3 = \frac{\langle n(n-1)(n-2) \rangle}{\langle n \rangle^3} - 1, \quad (6.29)$$

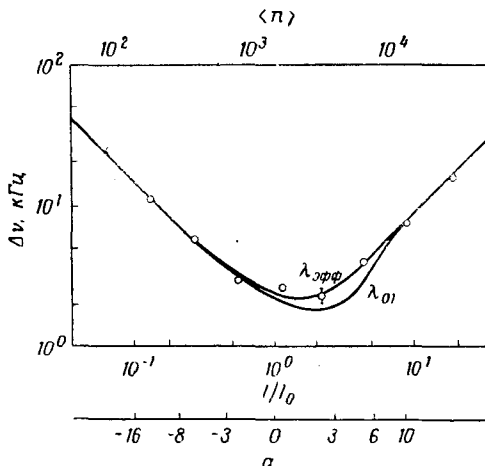
который меняется от 5 (гауссово распределение) до 0 (амплитудно-стабилизированное поле) (фиг. 17, 18).

Из стационарного решения уравнения Фоккера — Планка для статистического распределения лазерного поля можно вывести распределение фотоотсчетов от фотодетектора (в пределах времени когерентности

поля). Соответствующий k -й факториальный момент равен [31]

$$\langle n(n-1) \dots (n-k+1) \rangle = k! \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}} M_{10} \right)^k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-a^2}}{1 + \operatorname{erf} a} D_{-(k+1)}(\sqrt{2} a), \quad (6.30)$$

где M_{10} — среднее число фотоотсчетов на пороге и $D_{-(k+1)}$ — функция параболического цилиндра [36]. Как



Ф и г. 19. График «эффективной» ширины линии $\Delta \nu$ в зависимости от лазерной интенсивности I , нормированной к пороговому значению I_0 .

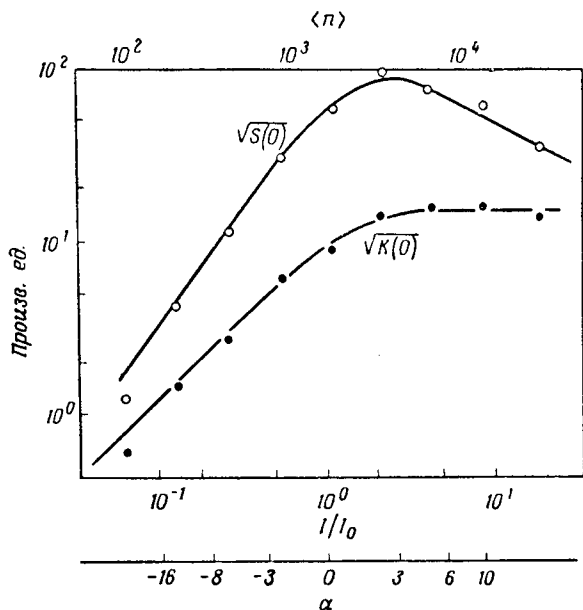
Ось абсцисс прокалибрована также в единицах параметра накачки a и среднего числа фотонов внутри резонатора $\langle n \rangle$.

видно, согласие между экспериментом и теорией является очень хорошим.

В заключение рассмотрим частотные спектры флуктуаций интенсивности и покажем, что они согласуются с тем же самым уравнением Фоккера — Планка [31], стационарное решение которого воссоздается по приведенному выше распределению ансамбля фотоэлектронов.

Улучшая чувствительность управляющего фотоэлемента, нам удалось стабилизировать подпороговые точки при очень малой интенсивности поля, не вызы-

вая как это было прежде, переходных процессов в системе¹⁾. Это позволяет вместо измерений временных корреляций проводить более простые спектральные измерения.



Фиг. 20. График зависимости корня квадратного из спектральной плотности $\sqrt{S(0)}$ и полной мощности флуктуаций интенсивности $\sqrt{K(0)}$ от лазерной интенсивности I , нормированной к пороговому значению I_0 .

Результаты приведены на фиг. 19 и 20. Измеренное с помощью анализатора спектра спектральное распределение флуктуаций интенсивности в пороговой области оказывается мало отличающимся от лоренцева. Для спектрального распределения любой формы мы определяем «эффективную» ширину линии $\Delta\nu$ эквивалентной

¹⁾ Это ограничивает минимально допустимое рабочее состояние значением $I/I_0 = 1/10$ (I_0 — пороговая интенсивность), тогда как при прежней системе можно было стабилизировать любую рабочую точку, даже столь малой интенсивности, как $I/I_0 = 1/100$.

лоренцевой кривой как отношение $\pi^{-1}K(0)/S(0)$ между измеренной с помощью среднеквадратичного вольтметра полной спектральной мощностью $K(0)$ и значением спектральной плотности $S(0)$ на нулевой частоте. Мы построили графики $\Delta\nu$, $S(0)$ и $K(0)$ при фиксированном значении тока разряда и различных значениях интенсивности лазерного излучения, регулируемой смещением моды по доплеровскому контуру¹⁾. Горизонтальные оси прокалиброваны в единицах отношения фактической интенсивности I к пороговой интенсивности I_0 и в единицах параметра накачки a . Путем абсолютного тарирования выходной мощности и измерения резонаторных потерь рассчитано также среднее число фотонов $\langle n \rangle$ внутри резонатора.

Измеренная ширина линии согласуется с численными расчетами Рискена и Воллмера [38], которые представили динамическое решение для корреляционной функции интенсивности в виде суммы нескольких экспоненциальных членов (с константами затухания $\lambda_K^{(2)}$), входящих со статистическими весами M_K . Это приводит к эффективной константе затухания

$$\lambda_{\text{эфф}}^{(2)} = \left[\sum_K \frac{M_K}{\lambda_K^{(2)}} \right]^{-1}, \quad \left(\sum_K M_K = 1 \right). \quad (6.31)$$

На фиг. 19 изображена также главная константа затухания λ_{01} корреляционной функции интенсивности. Очевидно, что лоренцева аппроксимация с одной-единственной константой затухания не может служить адекватным описанием.

Полная мощность $K(0)$ связана с корреляционной функцией интенсивности $\Delta I = I - \langle I \rangle$ соотношением

$$K(0) = \langle \Delta I(0) \Delta I(\tau) \rangle_{\tau=0} = \langle \Delta I^2 \rangle. \quad (6.32)$$

Это соотношение дает альтернативный способ определения второго приведенного момента H_2 статистического

1) Частотные измерения, о которых сообщалось ранее [37], относились к рабочим условиям в области заметно выше или ниже порога и при этом диапазон около 2 порядков значений интенсивности вблизи порога не исследовался.

распределения фотоотсчетов. Результаты согласуются с данными, полученными методом фотоотсчетов.

При использованном в нашем эксперименте значении разрядного тока мы получили на пороге для ширины линии значение $\Delta\nu_s = 2500$ Гц и для числа фотонов в резонаторе величину $\langle n_s \rangle = 1570$. Их произведение является линейной функцией заселенности N_2 верхнего уровня лазерного перехода и, следовательно, линейной функцией тока разряда в разрядной трубке. Линейная зависимость была проверена экспериментально. Кроме того, величины $\langle n_s \rangle$ и $\Delta\nu_s$ связаны с параметром «трения» β и диффузионным параметром q уравнения Фоккера — Планка для функции распределения лазерного поля следующими соотношениями:

$$\langle n_s \rangle = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{q}{\beta}},$$

$$\Delta\nu_s = \frac{\sqrt{\beta q}}{2\pi} (\lambda_{\text{эфф}}^{(2)})_{a=0}.$$
(6.33)

Отсюда получаем $q = 4 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ и $\beta = 2 \text{ с}^{-1}$. Феноменологические параметры q и β могут быть связаны с атомными параметрами при помощи подходящей микроскопической модели. Если использовать двухуровневую атомную схему (с одинаковым вырождением уровней $g_1 = g_2$), причем уровни связаны электрическим дипольным переходом, то полученные значения q и β соответствуют величине электрического дипольного матричного элемента $|r_{12}| \approx 0,16 \text{ \AA}$ и заселенности верхнего уровня $N_2 \approx 3 \cdot 10^6$. Эти значения примерно соответствуют результатам более непосредственных измерений [39].

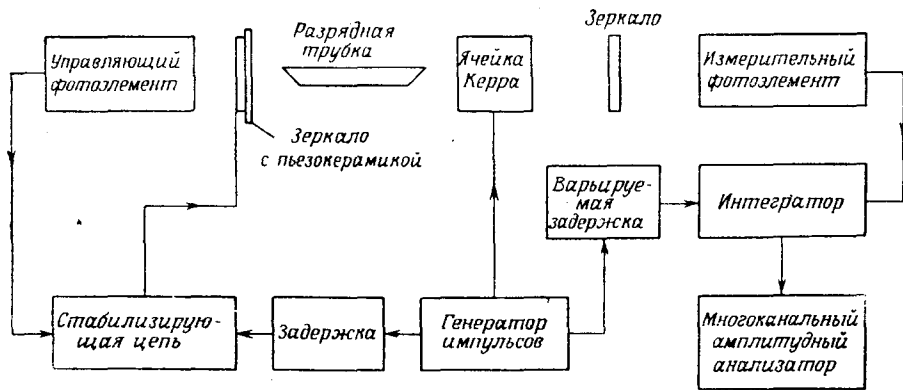
6.3. *Эксперименты в переходном режиме* [40]. Используя газовый лазер с переключением добротности и линейный метод СФО, мы можем, измеряя временную эволюцию лазерного поля в процессе его быстрого нарастания, исследовать нестационарный статистический ансамбль. Важность статистики в переходном режиме заключается в том, что она дает способ измерения величин, которые, хотя и имеют нулевые стационарные средние значения, содержат тем не менее полезную

информацию о динамике системы (это относится, например, к средним значениям нечетных степеней операторов поля).

Схема эксперимента представлена на фиг. 21. Внутрь резонатора одномодового He—Ne-лазера (длина волны 6328 Å) помещена ячейка Керра с торцами под углом Брюстера. Длина резонатора равна 45 см, конфигурация почти конфокальная, и положение моды контролируется пьезоэлектрическим механизмом подстройки. Ячейка наполнялась ортодихлорбензолом, который на длине волны 6328 Å более прозрачен, чем обычный нитробензол. Малые остаточные внутренние потери способствуют получению не более чем одной моды, генерируемой в широкой области изменения условий накачки. Хотя константа Керра ортодихлорбензола много меньше, чем у нитробензола, тем не менее лазерная генерация легко прерывается полем 10 кв/см (которому соответствует фазовый сдвиг между двумя ортогональными компонентами светового поля в ячейке всего лишь в несколько градусов).

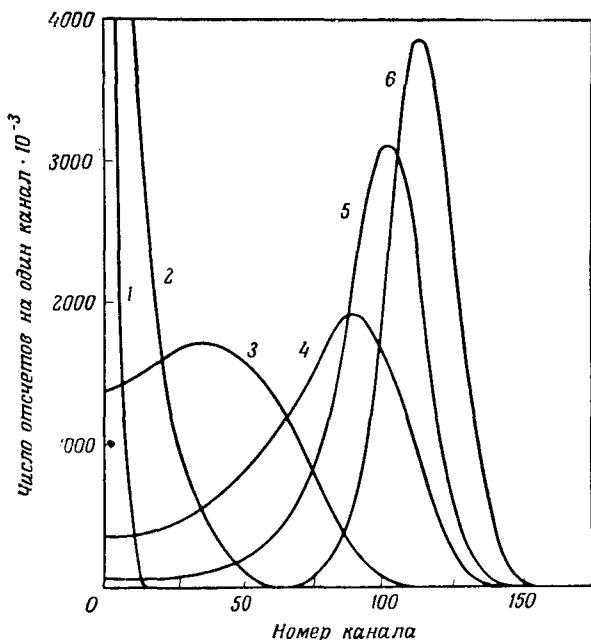
Первоначально лазер имеет некоторые исходные значения параметров накачки и резонатора, а оптический затвор закрыт. Затем ячейка Керра включается в момент $t = 0$ за время, меньшее 5 нс. Лазерное поле претерпевает переходный процесс нарастания от начального статистического распределения, соответствующего равновесию между усилением и потерями в далекой подпороговой области, к асимптотическому надпороговому состоянию. В момент $t = \tau$ мы проводим фотоотсчетные измерения за время $T = 50$ нс, очень малое по сравнению с временем нарастания, которое в нашем случае порядка нескольких микросекунд. По достижении стационарного состояния производится амплитудно-стабилизирующая операция, осуществляемая путем измерения мощности излучения лазера и сравнения ее со стандартным эталонным сигналом согласно процедуре, описанной в разд. 6.2. Это эквивалентно «приготовлению» идентичного начального состояния для последующего измерительного цикла.

После измерения затвор закрывается на время порядка 10 мс. В конце этого интервала времени затвор



Ф и г. 21. Экспериментальная установка для проведения эксперимента в переходном режиме.

снова открывается и описанный выше цикл операций повторяется. Таким способом мы воссоздаем ансамбль распределений макроскопически идентичных событий.



Ф и г. 22. Экспериментальные статистические распределения с различными временными задержками, полученные от лазера в переходном режиме.

Сплошные линии проведены по экспериментальным точкам, которые не показаны, чтобы не загромождать графика. Все распределения нормированы к одной и той же площади.

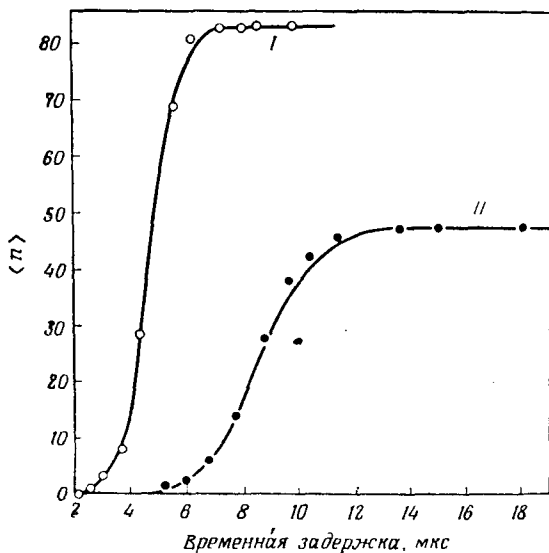
1—2,6 мкс; 2—3,7 мкс; 3—4,3 мкс; 4—5 мкс; 5—5,6 мкс; 6—8,8 мкс.

Последовательно варьируя τ , мы получаем временную эволюцию распределения фотоотсчетов $p(n, T, \tau)$.

На фиг. 22 приведен набор экспериментальных кривых.

Измеренные распределения не являются истинными распределениями СФО, поскольку существует некоторый неизбежный фон вследствие прохождения света через зеркала резонатора, а также потому, что мы использовали линейный метод. Как световой фон, так и

одноэлектронное амплитудное распределение определяются из независимых измерений с помощью одной и той же аппаратуры. Моменты распределений фотоотчетов вычисляются: а) в предположении, что световой



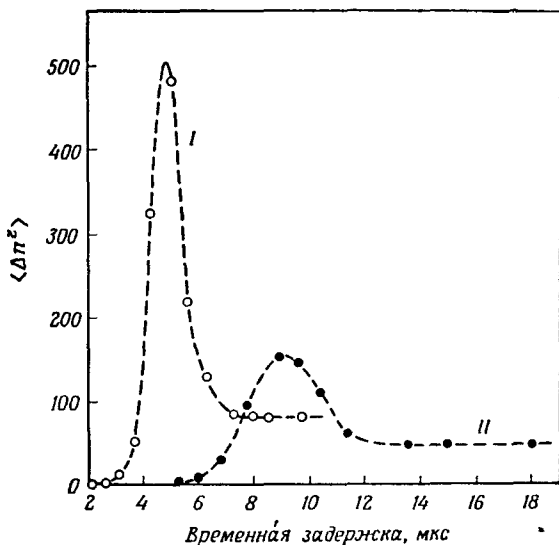
Ф и г. 23. Эволюция среднего значения $\langle n \rangle$ статистического распределения $p(n, T, \tau)$.

Сплошные кривые соответствуют теоретическим кривым, наилучшим образом аппроксимирующим экспериментальные результаты; точки, относящиеся к кривой I, были получены из статистических распределений фиг. 22.

фон некоррелирован с лазерным светом, и б) с использованием формулы, приведенной в § 3 для линейного метода.

Среднее число фотоотчетов $\langle n \rangle$ и соответствующая дисперсия $\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$ как функции временной задержки при двух различных значениях I и II параметра накачки приведены на фиг. 23 и 24. Мы можем выделить первую область, где благодаря процессу вынужденного усиления величина $\langle n \rangle$ быстро возрастает и рост дисперсии происходит намного быстрее, чем при медленном прохождении через последовательность стационарных состояний (как показано на фиг. 20). Это

объясняется увеличением начального разброса функции распределения фотонов из-за линейного усиления вынужденным излучением. Когда внутри резонатора накопится большое количество электромагнитной энергии,



Ф и г. 24. Дисперсия $\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$ статистического распределения $p(n, T, \tau)$ как функция времени.

Кривые представляют собой интерполяцию экспериментальных данных.

взаимодействие поля с атомами перестает быть линейным процессом и, следовательно, кривая $\langle n \rangle$ имеет точку перегиба, достигая предельного значения насыщения; дисперсия проходит через максимум и уменьшается затем до асимптотического значения, соответствующего стационарному распределению.

Экспериментальные результаты можно интерпретировать с помощью следующих полуклассических соображений. Комплексная амплитуда лазерного излучения подчиняется нелинейному уравнению Ланжевена (6.8) с гауссовым шумовым источником $\Gamma(t)$, корреляционные функции которого определены соотношениями (6.2). Записывая соответствующее уравнение для числа

фотонов n и усредняя по ансамблю, получаем

$$\frac{d \langle n \rangle}{d\tau} - 2\beta d \langle n \rangle + 2\beta \langle n^2 \rangle = 0. \quad (6.34)$$

Достаточно высоко над порогом генерации малый нелинейный вклад $2\beta \langle n^2 \rangle$ (который становится существенным только за большие времена) может быть хорошо аппроксимирован выражением $2\beta \langle n \rangle^2$. С помощью этого приближения уравнение (6.34) с начальным условием n_0 можно проинтегрировать. В результате получаем выражение

$$\langle n(\tau) \rangle_{n_0} = \frac{n_0 d}{n_0 [1 - \exp[-2\beta d\tau]] + d \exp[-2\beta d\tau]}, \quad (6.35)$$

которое является решением, вытекающим из полуклассической теории Лэмба [41]. Фактически n_0 является случайной переменной с вероятностной функцией распределения $p(n_0)$, соответствующей состоянию лазера перед включением. Следовательно, измеренное число фотонов равно

$$\langle n(\tau) \rangle = \int_0^{\infty} \langle n(\tau) \rangle_{n_0} p(n_0) dn_0. \quad (6.36)$$

Рассматривая β , d и n_0 в качестве подгоночных параметров и считая $p(n_0)$ геометрическим распределением (соответствующим гауссову полю), поскольку начальное состояние было гораздо ниже порога, мы добились наилучшего совпадения экспериментальных точек на фиг. 23 с выражением (6.36). Согласие между теоретическими кривыми и экспериментальными точками удовлетворительное.

В табл. 2 приведены численные значения трех подгоночных параметров в двух экспериментальных ситуациях. Используя полученные экспериментально стационарные значения $\langle n \rangle_{\infty}$ и $\langle \Delta n^2 \rangle_{\infty}$, мы из соотношения

$$2q = \beta d \frac{\langle \Delta n^2 \rangle_{\infty}}{\langle n \rangle_{\infty}} \quad (6.37)$$

определяем величину q . Это соотношение вытекает из следующих соображений. Для поля, являющегося линейной суперпозицией амплитудно-стабилизированного

Таблица 2

Численные значения лазерных параметров, соответствующие кривым I и II на фиг. 23 и 24¹⁾

	$\langle n_0 \rangle^2$	$\beta = B/2c^{-1}$	$d = \langle n \rangle_{\infty}^2$	$q = A/4 \text{ с}^{-1}$	$ a_0 $ ³⁾	a	$C = 4q - 2\beta d \text{ с}^{-1}$	$\langle n \rangle_{\text{пор}}^2$
I	82	1,09	$9,96 \cdot 10^5$	$1,1 \cdot 10^6$	24,5	993	$2,23 \cdot 10^6$	1130
II	90	0,98	$5,76 \cdot 10^5$	$0,6 \cdot 10^6$	17	738	$1,27 \cdot 10^6$	880

¹⁾ q , β , d и a — параметры, использованные Рискеном [31]; A , B и C — параметры Скалли и Лэмба [42].

²⁾ Среднее число фотонов внутри резонатора, полученное по измеренному за время 50 нс числу фотоотсчетов, умноженному на $1,2 \cdot 10^4$ (обратный коэффициент поглощения из-за резонаторных зеркал, фильтров и квантового выхода фотокатода).

³⁾ $a_0 < 0$ — параметр накачки лазера перед операцией включения (ниже порога).

и гауссова полей, дисперсия СФО определяется выражением (2.18). В пределе $S \gg N \gg 1$ отсюда следует

$$\frac{\langle \Delta n^2 \rangle}{\langle n \rangle} \approx \frac{2SN}{S} = 2N$$

и $N = \beta d/q$.

Приведены также значения параметра накачки $a = (\beta/q)^{1/2}d$ до включения лазера ($a_0 < 0$) и после; для сравнения мы вычислили, каково было бы среднее число фотонов на пороге $\langle n \rangle_{\text{пор}} = 1,13(q/\beta)^{1/2}$ в стационарном состоянии. В заключение нам кажется полезным привести численные значения использованных Скалли и Лэмбом [42] параметров A , B , C . Эволюцию функции распределения лазерного поля из вакуумного к стационарному состоянию можно рассчитать, решая зависящее от времени уравнение (6.6), что и было сделано в двух недавних работах [43, 44].

Качественно наши результаты согласуются с теоретическими, но количественного сравнения проделать невозможно, так как известные вычисления относятся к гораздо меньшим значениям числа фотонов [43] или параметров генерации [44], чем рассмотренные нами. Если бы даже расчеты в работе [44] были проведены вплоть до значений параметра $a = 1000$, то и тогда детальное

количественное сравнение было бы бесполезным, поскольку мы работаем уже в области, где кубическое приближение для нелинейности нарушается (см. численные данные в табл. 2) ¹⁾.

§ 7. Приложения СФО к проблемам рассеяния

Обсудим вкратце приложение СФО к простой задаче рассеяния, а именно к линейному рассеянию когерентного света средой, состоящей из нескоррелированных, статистически распределенных рассеивателей. Обычно подразумевается, что находящаяся в термическом равновесии система является гауссовой и, следовательно, то же самое должно быть справедливо и для рассеянного поля. Напомним, что стационарный процесс называется гауссовым, если [6]:

а) говоря на языке фурье-разложения, $P(\{\alpha_k\})$ представляет собой произведение независимых гауссовых функций с нулевым средним значением для каждой гармонике;

б) при описании с помощью последовательности вероятностных функций распределения *все* основные функции распределения W_n являются гауссовыми.

Если известно, что процесс гауссов, то нужно только измерить корреляционную функцию первого порядка $G^{(1)}$, поскольку принцип построения функции W_n нам уже известен [см., например, соотношение (5.1)]. Поэтому в таких случаях обычно достаточно измерений частотного спектра. Если, однако, имеются какие-либо сомнения в гауссовом характере данного поля, то измерений первого порядка СФО уже *недостаточно*, поскольку они дают информацию только относительно $W_1(\alpha, t)$, а не о $P(\{\alpha_k\})$. В этом случае необходимо провести измерения СФО во всех порядках. Никогда, конечно, не полагаются только на такую эмпирическую классификацию рассматриваемой системы, а пытаются

¹⁾ Дальнейшее изучение переходного режима содержится в работе [64]. Флуктуации интенсивности в переходном режиме можно также изучать, наблюдая разброс в моментах включения лазера [65, 66]. Теория переходного режима развивалась в работах [67, 68]. — *Прим. ред.*

использовать теоретические модели. Если, например, при измерении W_2 получают выражение вида (5.1) с $|g^{(1)}(\tau)| = \exp[-\beta\tau]$, то это означает, что гауссов процесс является марковским [6] и все высшие функции распределения автоматически определены. В этом случае модель Фоккера — Планка точно описывает систему.

Хотя по вопросу о совместном использовании лазеров и частотной техники имеется огромное количество информации [45, 46], метод СФО применялся очень редко. Мы расскажем здесь о совместном использовании одномодового амплитудно-стабилизированного лазера на длине волны 6328 Å и СФО для изучения двух рассеивающих сред, а именно:

1) стеклянного матового диска, т. е. диска с небольшими шероховатостями со средними размерами и расстояниями между шероховатостями порядка 3 мкм (см. также § 2) [14],

2) суспензии броуновских частиц (полистироловые шарики в воде). Эксперимент такого типа повторялся с частицами разных диаметров (от 0,088 до 1,2 мкм) [47].

7.1. Статистические распределения. Нетрудно показать, что находящееся первоначально в когерентном состоянии и имеющее вид плоской волны $\alpha_0 \exp[i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ поле, рассеиваемое стохастической средой линейно в направлении \mathbf{k}_s , имеет статистическое распределение

$$W_1(\alpha) = \int \delta(\alpha - \lambda_K \alpha_0) W_1(\lambda_K) d^2 \lambda_K, \quad (7.1)$$

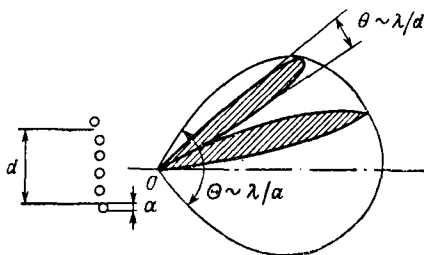
где λ_K — амплитуда рассеяния в первом борновском приближении, соответствующая \mathbf{K} -вектору

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s. \quad (7.2)$$

Следовательно, в случае гауссова рассеивателя рассеянное поле тоже будет гауссовым.

Это можно показать также и с помощью известного рассуждения Рэля [14] о суперпозиции многих членов с одинаковыми амплитудами и случайными фазами. На

фиг. 25 схематически изображена геометрия эксперимента с матовым диском. Лазерный пучок с диаметром d падает на систему из N рассеивателей со средним размером и расстоянием между ними, равным a ($N \approx d/a$). Каждый рассеиватель дает дифракционную картину с расходимостью $\Theta \sim \lambda/a$. В результате интерференции между случайно расположенными рассеивателями возникает диаграмма направленности со случайным распределением лепестков, имеющих расходимость



Фиг. 25. Геометрия рассеяния от набора нескоррелированных частиц.

Диаграммы направленности изображены в виде полярных диаграмм.

$\theta \sim \lambda/d$. Если теперь зарегистрировать различные реализации такого эксперимента (для этого необходимо только перед каждым новым измерением поворачивать диск на небольшой угол), то мы получим гауссову P -функцию. Такие же рассуждения справедливы и для броуновских частиц. Соответствующие распределения СФО были приведены на фиг. 2 и 7. Эти же рассеиватели использовались при измерении приведенных в § 5 совместных функций распределения СФО.

7.2. Частотный спектр. Рассмотрим бегло несколько вопросов, уже обсуждавшихся в курсах лекций этой школы [45, 46].

Обозначим для краткости через \mathcal{F}_r и \mathcal{F}_t операторы фурье-преобразования по пространственным и временным переменным; $G^{(1)}(\mathbf{K}, t)$ — временная корреляционная функция для поля, рассеянного в направлении

\mathbf{k}_s , так что соответствующий вектор рассеяния есть $\mathbf{K} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s$; через

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{N} \sum_{ij} \langle \delta(\mathbf{r} + \mathbf{r}_i(0) - \mathbf{r}_j(t)) \rangle \quad (7.3)$$

обозначена корреляционная функция частиц, т. е. корреляция флуктуаций плотности (здесь угловые скобки означают усреднение по равновесному распределению рассеивающей среды). Тогда если рассеяние из-за флуктуаций линейной поляризуемости пропорционально флуктуациям плотности, т. е.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \Delta\rho, \quad (7.4)$$

и если падающий свет представляет собой свободную от флуктуаций плоскую волну (когерентное состояние), то отсюда вытекает следующее фундаментальное соотношение [48—50]:

$$G^{(1)}(\mathbf{K}, t) = A(\mathbf{K}) \mathcal{F}_{\mathbf{r}} \{G(\mathbf{r}, t) - \rho_0\}, \quad (7.5)$$

где ρ_0 — средняя плотность, $A(\mathbf{K})$ — амплитуда рассеяния от одного рассеивателя и оператор $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}$ трансформирует \mathbf{r} в \mathbf{K} . Согласно теореме Винера — Хинчина, частотный спектр рассеянного света определяется выражением

$$I(\mathbf{K}, \Delta\omega) \equiv \mathcal{F}_t \{G^{(1)}\} = A(\mathbf{K}) \mathcal{F}_t \mathcal{F}_{\mathbf{r}} \{G - \rho_0\}, \quad (7.6)$$

где $\Delta\omega = \omega_i - \omega_s$ — частотный сдвиг между падающим и рассеянным светом и оператор \mathcal{F}_t трансформирует t в $\Delta\omega$.

В дальнейшем мы больше не будем учитывать ограниченность поперечного сечения пучка. В этом случае каждый рассеиватель должен входить со своим весом, пропорциональным интенсивности света $i(\mathbf{r})$ в точке его нахождения \mathbf{r} . Следовательно, вместо (7.5) мы должны записать теперь

$$G^{(1)}(\mathbf{K}, t) = \mathcal{F}_{\mathbf{r}} \{i(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, t)\} \quad (7.7)$$

[здесь и далее мы пренебрегаем для простоты постоянным членом ρ_0 , который дает δ -функциональный вклад в

рассеяние вперед, и опускаем одночастичную амплитуду рассеяния $A(\mathbf{K})$]. Эффект ограниченности размера пучка в случае броуновских частиц пренебрежимо мал. Для вращающегося диска одночастичная корреляционная функция имеет простой вид

$$G(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{u}t), \quad (7.8)$$

поскольку диск движется с постоянной скоростью. Пучок имеет гауссов профиль (TEM₀₀-мода лазера)

$$i(\mathbf{r}) = \exp\left[-\frac{r^2}{r_0^2}\right]. \quad (7.9)$$

Следовательно, корреляционная функция поля равна

$$\begin{aligned} G^{(1)}(\mathbf{K}, t) &= \mathcal{F}_r \left\{ \exp\left[-\frac{r^2}{r_0^2}\right] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{u}t) \right\} = \\ &= \exp\left[-\frac{t^2}{T^2}\right] \exp[-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}t], \end{aligned} \quad (7.10)$$

где $T = r_0/u$ — время прохождения одной шероховатости через пучок. Соответствующий частотный спектр определяется выражением

$$I(\mathbf{K}, \Delta\omega) = \exp[-T^2(\Delta\omega - \mathbf{K} \cdot \mathbf{u})^2] \quad (7.11)$$

и имеет зависящий от угла доплеровский сдвиг (в обычных экспериментах он мал) и гауссову частотную зависимость с «временем когерентности» T . Изменяя форму светового профиля $i(r)$ подходящими фильтрами, можно, конечно, получить другую частотную зависимость.

Эффект конечного размера пучка в случае броуновских частиц мал [47]. В этом случае скорость подчиняется уравнению Ланжевена и получающаяся после интегрирования одночастичная корреляционная функция имеет вид

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left[-\frac{r^2}{\sigma^2}\right], \quad (7.12)$$

где для больших $|t|$

$$\sigma^2(t) = \frac{4k_B T}{m\beta^2} (\exp[-\beta|t|] + \beta|t| - 1) \approx 4D|t| \quad (7.13)$$

и

$$\beta = \frac{6\pi a \eta}{m}, \quad D = \frac{k_B T}{m\beta} \quad (7.14)$$

(η — коэффициент вязкости жидкости, a и m — соответственно радиус и масса броуновских частиц, $k_B T$ — больцмановский температурный множитель). В диффузионном приближении [вторая форма записи правой части выражения (7.13)] мы получаем

$$G^{(1)}(K, t) = \exp[-K^2 D |t|] \quad (7.15)$$

и

$$I(K, \Delta\omega) = \frac{1}{\Delta\omega^2 + K^2 D}. \quad (7.16)$$

Нам кажется полезным представить эти результаты в виде таблицы (табл. 3).

Таблица 3

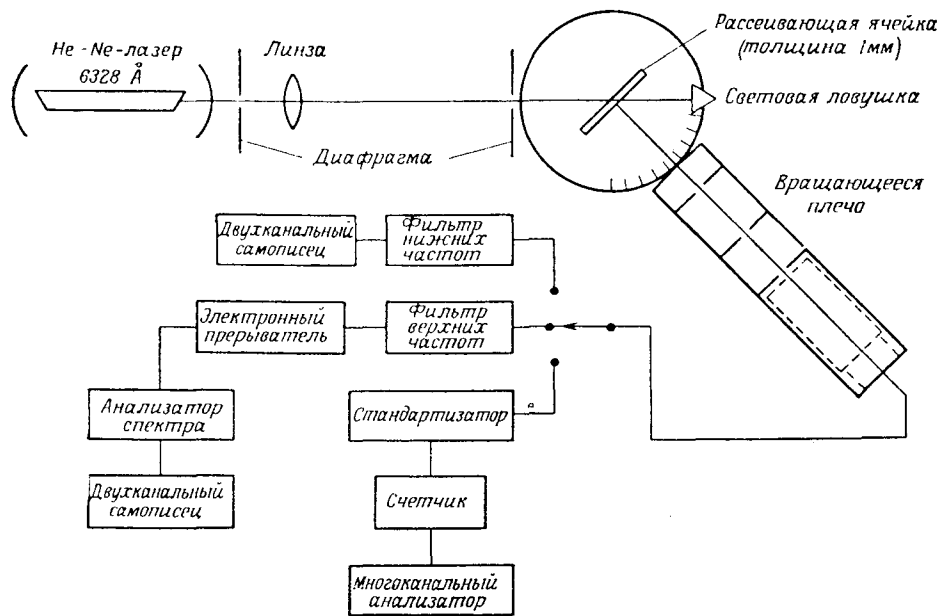
Сравнение частотного спектра света в двух экспериментах по рассеянию

	Вращающийся диск	Броуновские частицы
Скорость u	$u = \text{const}$	$\dot{u} + \beta u = F(t)$
Одночастичная корреляция $G(r, t)$	$\delta(r - ut)$	$\langle F(0) \cdot F(t) \rangle = C\delta(t)$
Поперечное сечение пучка	$i(r) = \exp[-r^2/r_0^2]$	$1/(\pi\sigma^2)^{3/2} \exp[-r^2/\sigma^2]$ ($\sigma^2 \approx 4Dt$)
Корреляционная функция поля $G^{(1)}(K, t)$	$\mathcal{F}_r \{i(r) G(r, t)\} = \exp[-t^2/T^2] \exp[-iKu t]$ $T = r_0/u$	Плоская волна $\mathcal{F}_r \{G(r, t)\} = \exp[-K^2 D t]$
Частотный спектр поля $I(K, \Delta\omega)$	$\mathcal{F}_t \{G^{(1)}(K, t)\} = \exp[-T^2(\Delta\omega - Ku)^2]$ гауссов	$\mathcal{F}_t \{G^{(1)}(K, t)\} = 1/(\Delta\omega^2 + (K^2 D)^2)$ лоренцев

7.3. *Экспериментальные результаты* [47]. Было проделано три различных вида измерений света, рассеянного раствором диэлектрических частиц, находящихся в броуновском движении: а) угловые распределения интенсивности; б) частотные распределения на фиксированные углы рассеяния; в) распределения фотоотсчетов.

Показанная на фиг. 26 экспериментальная установка состоит из источника света, рассеивающей ячейки с собирательной оптикой и электронного оборудования для проведения экспериментов всех трех типов. Источником света служил гелий-неоновый газовый лазер с длиной волны 6328 \AA и мощностью излучения 2 мВт, генерирующий ТЕМ₀₀-моду. Во избежание медленных дрейфов выходная мощность контролировалась. С помощью длиннофокусных линз диаметр пучка уменьшался до величины порядка 0,2 мм. На пути лазерного пучка под брестеровским углом ставилась очень тонкая (1 мм) рассеивающая ячейка. Малые полные поперечные размеры объема взаимодействия обеспечивали достаточно большие площади когерентности для рассеянного света, которые были почти постоянны даже для больших углов рассеяния. Таким образом, для улавливания рассеянного света в области когерентности могла быть использована точечная диафрагма с обычной апертурой. Побочный рассеянный свет тщательно исключался с помощью диафрагм. После прохождения через ячейку лазерный луч гасился световой ловушкой.

Измерения проводились на разбавленных растворах монодисперсных полистироловых сферических частиц с различными диаметрами от 0,088 до 1,06 мкм. Каждый образец состоял из частиц почти одного размера с очень малой дисперсией. Жидкость, в которой были диспергированы частицы, представляла собой деионизованную воду, профильтрованную через мелкопористый фильтр. Затухание пучка при прохождении через ячейку никогда не превышало 15%, так что вкладом от многократного рассеяния можно было пренебречь. Кроме того, зная сечение рассеяния и глубину ячейки, мы могли вычислить среднее расстояние между частицами. Оно всегда было намного больше длины



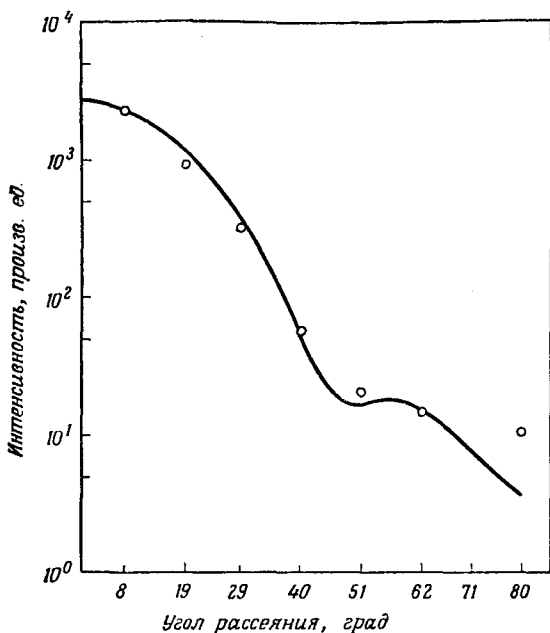
Ф и г. 26. Схема экспериментального устройства.

Три различные электронные цепи, соответствующие разным измерениям: углового распределения интенсивности, частотного спектра и распределения фотоотсчетов.

волны, так что не существовало никакой фиксированной фазовой корреляции между волнами от отдельных рассеивающих сфер, и рассеивающиеся компоненты могли рассматриваться как независимые. Следует подчеркнуть еще одно обстоятельство, связанное с малой величиной рассеивающего объема. Когда время ухода частиц из объема взаимодействия меньше характерного времени релаксации импульса частиц (определяемого как средний временной интервал, по истечении которого соударения заставляют частицу «забыть» свою начальную скорость), то следует ожидать расхождения между экспериментальными результатами и результатами рассмотрения методом рассеяния плоской волны. Характерное время релаксации равно β^{-1} , где β определяется соотношением (7.14). В нашем случае время ухода можно вычислить на основе диффузионной теории броуновской частицы, причем типичные значения оказываются больше 10^{-1} с, тогда как время релаксации β^{-1} порядка 10^{-10} с. Поэтому применима теория рассеяния плоской волны, несмотря на малый диаметр падающего пучка. Для расчета фактического угла рассеяния внутри ячейки необходимо учесть поправки на преломление. Поправки за счет изменения телесного угла улавливания и коэффициента отражения от поверхностей ячейки при различных углах рассеяния менее важны. Они становятся существенными только для больших углов выхода. Мы ограничились изучением рассеяния вперед, так как для частиц большого диаметра обратное отражение переднего лепестка маскирует рассеяние назад. Если не принять специальных мер, то побочный свет от торцов ячейки и внутренних отражений может дать основной вклад в улавливаемое излучение, особенно при больших углах рассеяния. Эти паразитные вклады устранялись эффективной световой ловушкой, селективирующей очень узкий телесный угол улавливания с центром в объеме взаимодействия.

Были использованы различные фотодетекторы для получения распределений фотоотсчетов и для измерения частотных и угловых распределений. В первом случае для превышения порога нелинейной цепи важно, чтобы единичный фотоэлектронный импульс был

достаточно велик, и поэтому мы использовали фотоумножитель типа 56AVP с фотокатодами S-11 (квантовый выход на длине волны 6328 Å составляет 0,5%) и 14 динодами, работающими при высоком напряжении, так



Фиг. 27. Угловая диаграмма рассеяния для частиц диаметром 0,796 мкм.

что среднее усиление составляло 10^8 . Во втором случае важно уменьшить дробовой шум, и поэтому использовался фотоумножитель типа XP 1002 с фотокатодами S-20 (квантовый выход 5%) и только с 10 динодами.

Во всех этих случаях фильтры не применялись, а фотокатод располагался на расстоянии 50 см от рассеивающей ячейки и имел перед собой круговую диафрагму диаметром 0,5 мм.

Угловые распределения. Производя временное усреднение рассеянной интенсивности, мы получаем угловое распределение интенсивности рассеянного света.

Поскольку корреляции между частицами отсутствуют, то угловое распределение выражается в терминах одночастичной теории рассеяния Ми.

Флуктуирующий выходной фототок через фильтр нижних частот посылался на двухканальный самописец. Типичный результат показан на фиг. 27. Экспериментальные точки согласуются с теоретическими данными. Разброс экспериментальных данных для всех измерений меньше 5%. Следует полагать, что наличие нескольких сильно несогласующихся с теоретическими кривыми точек обусловлено некоторой остаточной систематической ошибкой (аномальными преломлениями на неоднородностях ячейки при определенных ее положениях). Связанная с каждой экспериментальной точкой величина ошибки соответствует максимальному разбросу по трем измерениям.

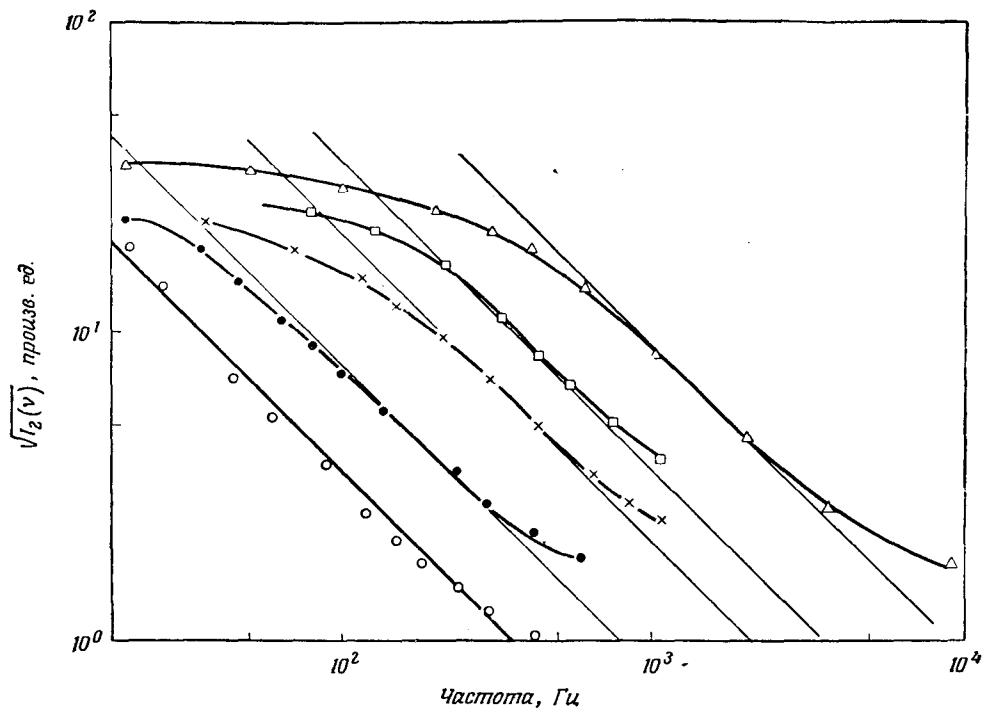
Частотные спектры. В табл. 3 приведено выражение для спектральной плотности света, рассеянного на данный угол. В рассматриваемом диффузионном приближении линия имеет лоренцеву форму.

Поскольку ожидаемые значения ширины имеют порядок нескольких герц, требуется техника с очень высоким разрешением.

Мы использовали метод собственных биений. Этот метод позволяет определить спектральное распределение $I_2(\omega)$ флуктуаций тока фотодетектора с помощью формулы свертки (см. лекцию Камминса [46])

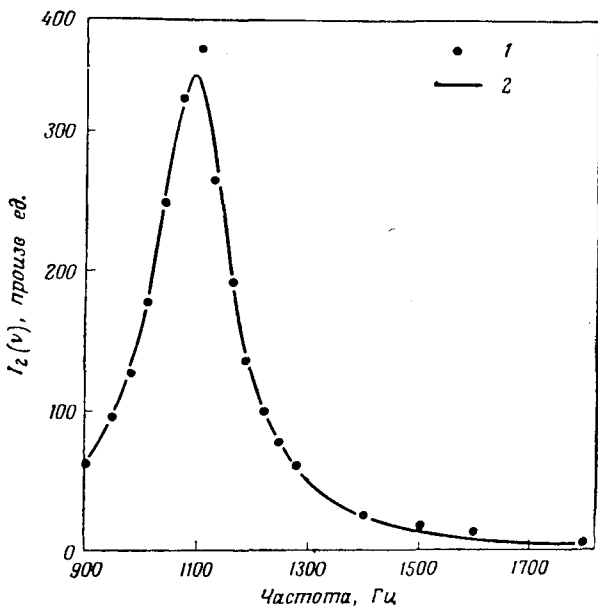
$$I_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_1(\omega') I_1(\omega - \omega') d\omega'. \quad (7.17)$$

Уравнение (7.17) фактически означает, что спектральная плотность на частоте ω представляет собой сумму всех биений между спектральными компонентами на оптических частотах, различающихся на величину ω . Нетрудно убедиться, что если функция $I_1(\omega)$ является лоренцевой с центром на частоте ω_0 и шириной линии $\Delta\omega_0$, то спектральная плотность $I_2(\omega)$ также имеет лоренцевую форму, но с центром на нулевой частоте и шириной линии $2\Delta\omega$. Выходное напряжение от анализатора спектра с двухполупериодным мостиком,



Ф и г. 28. Корень квадратный из спектральной плотности фототока.
 Частицы диаметром 0,088 мкм. Углы рассеяния: \circ — 8° ; \bullet — 19° ; \times — 29° ; \square — 40° ; \triangle — 51° .

который использовался в наших измерениях, пропорционально корню квадратному из $I_2(\omega)$, и поэтому непосредственный результат нашего измерения должен иметь вид корня квадратного из лоренцевой функции.



Фиг. 29. Пример спектральной плотности промодулированного фототока.

Диаметр частиц 0,088 мкм. Угол рассеяния 29° . 1 — экспериментальные точки; 2 — лоренцева кривая (наилучшая аппроксимация).

Будучи более простым, метод собственных биений при измерении линий с шириной в несколько герц еще и более удобен, чем гетеродинный метод, поскольку разница в 2 раза между ширинами линий $I_2(\omega)$ и $I_1(\omega)$ может быть чрезвычайно полезной при работе на пределе разрешения анализатора спектра.

Нами использовался тот же фотоумножитель, что и при угловых измерениях, и анализатор спектра типа Хьюлетт Паккард 302 Å с шириной полосы 6 Гц. Выходной сигнал анализатора спектра регистрировался после прохождения через фильтр нижних частот (постоянная

времени 15 с). На фиг. 28 измеренные при различных углах рассеяния частотные спектры представлены в логарифмическом масштабе по обеим осям. Вследствие дробового шума согласование экспериментальных точек, соответствующих большим углам рассеяния, оказывается менее точным. В высокочастотной области экспериментальные результаты хорошо ложатся на прямую линию с тангенсом угла наклона, равным (-1) , подтверждая тем самым лоренцев характер спектра рассеянного света. Остается еще, однако, некоторая неопределенность относительно правильного значения ширины линии, которую следует приписывать каждой кривой, поскольку из-за технических ограничений в области $0-20$ Гц нельзя получить никаких данных. Для выяснения этого вопроса был использован метод, несколько отличный от изложенного выше. Выходной сигнал фотоумножителя пропускался через фильтр верхних частот, чтобы удалить составляющую постоянного тока, и затем модулировался частотой 1 кГц. Таким образом, спектральная плотность была сдвинута в область около 1 кГц и удалось измерить весь спектральный профиль. Полученные данные снова подтверждают лоренцев характер спектра и дают возможность определить ширину линии (пример приведен на фиг. 29).

С помощью такой составной техники удалось проверить как лоренцев характер спектра, так и соответствие между измеренной и ожидаемой ширинами спектральной линии. Количественные детали можно найти в работе [47].

Приложение 1)

Различные трактовки статистики лазера дают, казалось бы, противоречивые критерии для оценки степени когерентности лазерного излучения²⁾. В рассмот-

¹⁾ См. работу [55].

²⁾ Различие в критериях когерентности поля возникает из-за различного понимания этого термина. Когерентным часто называют поле, у которого малы амплитудные флуктуации, т. е. $\langle \Delta n^2 \rangle \ll \langle n^2 \rangle$ или $H_2 \ll 1$. Другое определение когерентности подразумевает, что поле близко к когерентному $|\alpha\rangle$ -состоянию. В этом случае критерием когерентности служит неравенство $\langle \Delta n^2 \rangle - \langle n \rangle \ll \langle n \rangle$. — Прим. ред.

рениях, основанных на уравнении Фоккера — Планка для вероятностной функции распределения поля [31, 33], в качестве определяющего параметра используется второй приведенный факториальный момент H_2 распределения фотонов $p(n)$, т. е.

$$H_2 = \frac{F_2}{F_1^2} - 1 \quad (F_k = \langle n!/(n-k)! \rangle). \quad (\text{П.1})$$

Согласно экспериментальным результатам [31, 48], этот момент очень близок к нулю (как это можно ожидать для когерентного состояния) уже при среднем числе фотонов, всего лишь в 10 раз превышающем пороговое значение.

При рассмотрении с помощью управляющего уравнения для оператора плотности поля [42] форму распределения $p(n)$ характеризуют его дисперсией $\langle \Delta n^2 \rangle$. Согласно этому критерию, отличие от когерентного состояния (распределения Пуассона) может быть очень большим, даже когда среднее число фотонов в 10^3 раз превышает пороговое значение. Этот факт легко объяснить, если вспомнить, что в достаточно далекой надпороговой области лазер хорошо описывается линейной суперпозицией когерентного поля со средним числом фотонов S и гауссова поля со средним числом фотонов $N = \frac{1}{4\pi} \langle n \rangle_0^2 / S$ ($\langle n_0 \rangle$ — число фотонов на пороге). Следовательно, дисперсия определяется выражением [10, 13, 31]

$$\begin{aligned} \langle \Delta n^2 \rangle &= S + N(1 + N) + 2SN = \\ &= S + \frac{1}{4} \pi \frac{\langle n \rangle_0^2}{S} \left(1 + \frac{1}{4} \pi \frac{\langle n \rangle_0^2}{S} \right) + \frac{1}{2} \pi \langle n \rangle_0^2, \quad (\text{П.2}) \end{aligned}$$

т. е., помимо вклада от гауссова поля, который становится пренебрежимо малым при $S > \langle n \rangle_0^4$, большой вклад в дисперсию вносит еще постоянный интерференционный член. Поэтому для получения почти пуассоновской дисперсии необходимо, чтобы среднее число фотонов намного превышало квадрат среднего числа фотонов на пороге (которое может принимать значения от 10^3 до 10^4 в зависимости от модового объема).

Рассмотрим вопрос с точки зрения процедуры измерения. Известно, что ослабление в $\sqrt{\eta}$ раз поля с распределением $P(\alpha)$ в представлении когерентных состояний приводит к возбуждению, описываемому весовой функцией [10]

$$P(\alpha') = \eta P(\alpha). \quad (\text{П.3})$$

Следовательно, k -й факториальный момент

$$F'_k = \int |\alpha|^{2k} P(\alpha) d^2\alpha$$

преобразуется как

$$F'_k = \eta^k F_k, \quad (\text{П.4})$$

так что факториальный момент H_2 остается не зависящим от ослабления. Используя эти свойства, легко показать, что в то время как среднее число фотонов меняется по закону $\langle m \rangle = \eta \langle n \rangle$, дисперсия изменяется согласно формуле

$$\langle \Delta m^2 \rangle = \eta^2 \langle \Delta n^2 \rangle + \eta(1 - \eta) \langle n \rangle \quad (\text{П.5})$$

и при $\eta \ll 1$ принимает вид $\langle \Delta m^2 \rangle = \eta \langle n \rangle$, который получался бы для пуассоновской статистики.

Однако в случае фотоотсчетных измерений величина η не является ослабляющим фактором и может даже принимать значения больше единицы. Если на светочувствительную поверхность попадает все поперечное сечение пучка полностью (диафрагм нет), то коэффициент преобразования фотонов в фотоэлектроны определяется выражением

$$\eta = \frac{cT}{L} \theta_1 \theta_2 \theta_3, \quad (\text{П.6})$$

где c — скорость света, θ_1 — коэффициент пропускания зеркала, θ_2 — коэффициент пропускания фильтров, θ_3 — квантовый выход фотокатода, L — длина резонатора и T — время одного измерения. В типичном случае $\theta_1 = 0,02$, $\theta_2 = 0,2$, $\theta_3 = 0,05$ и $L = 20$ см, так что при $T \approx 3$ мкс получаем $\eta \approx 1$ ¹⁾. Провести такой экспери-

¹⁾ Для получения распределений фотоотчетов, имеющих физический смысл, время T должно быть намного меньше времени релаксации τ_c флуктуаций интенсивности. В излагаемом здесь эксперименте величина τ_c составляла 16 мкс (см. фиг. 1 из работы [35]).

мент с помощью стандартной фотосчетной техники невозможно, так как при столь малом ослаблении временной интервал T был бы «переполнен» большим количеством (от 10^3 до 10^4) фотоэлектронов, что связано с чрезвычайно сложными проблемами мертвого времени.

С помощью использованного нами в нескольких экспериментах так называемого «линейного» метода становится возможным проверить приведенные выше рассуждения. Мы использовали одномодовый гелий-неоновый лазер с пороговым значением числа фотонов $\langle n \rangle_0 \approx 10^3$, амплитудно-стабилизированный выше порога в точке с числом фотонов $S \approx 10^4$. Исходя из приведенных выше значений $\theta_{1,2}$, L и $T = 2$ мкс, при различных уровнях дополнительного ослабления мы получили значения, приведенные в табл. П.1. Они полностью соответствуют уравнениям (2) и (5).

Таблица П.1

	Распределения фотоотчетов (измеренные)			Число фотонов в резонаторе (вычисленное)
η	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$6,6 \cdot 10^{-2}$	0,6	1
$\langle m \rangle$	160	670	6 100	10 150
$\langle \Delta m^2 \rangle$	430	4 500	310 000	940 000

ЛИТЕРАТУРА ¹⁾

1. Glauber R. J., в книге Quantum Optics, New York, Academic Press, 1969, p. 15 (см. перевод в сб. «Когерентные состояния в квантовой теории», изд-во «Мир», 1972).
2. Glauber R. J., в книге Quantum Optics and Electronics (Proceedings of Les Houches 1964 Summer School) ed. by C. De Witt, et al., New York, 1965 (см. перевод в сб. «Квантовая оптика и квантовая радиофизика», изд-во «Мир», 1966).
3. Mandel L., Wolf E., Rev. Mod. Phys., 37, 213 (1965).
4. Bonifacio R., Narducci L., Montaldi M., Nuovo Cimento, 47A, 890 (1966).
5. Rice S. O., Bell System Techn. Journ., 23, 282 (1944); 24, 46 (1945).

¹⁾ Литература, отмеченная звездочкой, добавлена редактором перевода. — Прим. ред.

6. Wang M. C., Uhlenbeck G. E., Rev. Mod. Phys., 17, 323 (1945).
7. Louisell W. M., Quantum Optics, New York, 1969.
8. Gordon J. P., Quantum Optics, New York, 1969.
9. Mandel L., Proc. Phys. Soc., 72, 1037 (1958).
10. Glauber R. J., в книге Physics of Quantum Electronics (Proceedings of 1965 Puerto Rico Conference), ed. by P. Kelley, et al. (New York, 1966).
11. Kelley P., Kleiner W. H., Phys. Rev., 136, 316 (1964).
12. Arecchi F. T., Berné A., Sona A., Phys. Rev. Lett., 17, 260 (1966).
13. Glauber R. J., в книге Quantum Electronics (Proc. of the III International Conference, Paris, 1963) ed. P. Grivet and N. Bloembergen, New York, 1964.
14. Arecchi F. T., Phys. Rev. Lett., 15, 912 (1965).
15. Freed C., Haus H., Phys. Rev. Lett., 15, 943 (1967).
16. Arecchi F. T., Berné A., Burlamacchi P., Phys. Rev. Lett., 16, 32 (1966).
17. Freed C., Haus H. A., Physics of Quantum Electronics (Proc. of 1965 Puerto Rico Conference), ed. by P. Kelley, et al., New York, 1966, p. 715.
18. Armstrong J. A., Smith A. W., Physics of Quantum Electronics (Proc. of 1965 Puerto Rico Conference), ed. by P. Kelley, et al., New York, 1966, p. 701.
19. Johnson F. A., McLean T. P., Pike E. R., Physics of Quantum Electronics (Proc. of 1965 Puerto Rico Conference), ed. by P. Kelley, et al., New York, 1966, p. 706.
20. Arecchi F. T., Berné A., Sona A., Burlamacchi P., Proc. of the IV International Quantum Electronics Conference, Phoenix, 1966, IEEE Journ. Quantum Electronics, 2, 341 (1966).
21. De Lotto I., Manfredi P. F., Principi P., Energia Nucleare, 11, 557 (1964).
22. Johnson F. A., Jones R., McLean T. P., Pike E. R., Phys. Rev. Lett., 16, 589 (1966).
23. Bédard G., Proc. Phys. Soc., 90, 131 (1967).
24. Feller W., в книге Anniversary volume for Courant (New York, 1948), p. 105.
25. Arecchi F. T., Rodari G., Sona A., готовится к печати.
26. Slepian D., Bell System Tech. Journ., 37, 163 (1958).
27. Glauber R. J., Barakat R., неопубликованное сообщение.
28. Whittaker E. T., Watson R. N., Modern Analysis, Ch. XVI, New York, 1940 (см. перевод: Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, т. II, М., 1962).
29. Arecchi F. T., Gatti E., Sona A., Phys. Lett., 20, 27 (1966).
30. Haus H. A., Quantum Optics, New York, Academic Press, 1969, p. 111.
31. Risken H., Zs. Phys., 186, 85 (1965); 191, 302 (1966).
32. Chandrasekhar S., Rev. Mod. Phys., 15, 1 (1943) (см. перевод: С. Чандрасекар, Стохастические проблемы в физике и астрономии, Гостехиздат, 1947).
33. Lax M., Louisell W. H., IEEE Journ. Quantum Electronics, 3, 47 (1967).
34. Arecchi F. T., Rodari G. S., Sona A., Phys. Lett., 25A, 59 (1967).

35. *Arecchi F. T., Giglio M., Sona A.*, Phys. Lett., **25A**, 341 (1967).
36. *Abramowitz M., Stegun I. A.*, Handbook of Mathematical Functions, New York, 1965, Ch. 19.
37. *Freed C., Haus H. A.*, Phys. Rev., **181**, 247 (1966).
38. *Risken H., Vollmer H. D.*, Zs. Phys., **201**, 323 (1967).
39. *Faust W. L., McFarlane R. A.*, Journ. Appl. Phys., **35**, 1010 (1964).
40. *Arecchi F. T., Degiorgio V., Querzola B.*, Phys. Rev. Lett., **19**, 1168 (1967).
41. *Lamb W. E.*, Phys. Rev., **134**, A1429 (1964).
42. *Scully M., Lamb W. E.*, Phys. Rev., **159**, 208 (1967).
43. *Scully M., Lamb W. E.*, неопубликованное сообщение на Международной конференции по квантовой электронике 1966 г., Феникс, Ар.
44. *Risken H., Vollmer H. D.*, Zs. Phys., **204**, 240 (1967).
45. *Van Kampen N. G.*, Quantum Optics, New York, Academic Press, 1969, p. 235.
46. *Cummins H. Z.*, Quantum Optics, New York, 1969, p. 247.
47. *Arecchi F. T., Giglio M., Tartari U.*, Phys. Rev., **163**, 186 (1967).
48. *Glauber R. J.*, Phys. Rev., **87**, 189 (1952), **94**, 751 (1954).
49. *Van Hove L.*, Phys. Rev., **95**, 249 (1954).
50. *Комаров Л. И., Фишер И. З.*, ЖЭТФ, **43**, 1927 (1962).
51. *Smith A. W., Armstrong J. A.*, Phys. Rev. Lett., **16**, 1169 (1966).
52. *Lachs G.*, Phys. Rev., **138**, B1012 (1965).
53. *Morawitz H.*, Phys. Rev., **139**, A1072 (1965).
54. *Lax M.*, Phys. Rev., **157**, 213 (1967).
55. *Arecchi F. T., Degiorgio V.*, Phys. Lett., **27A**, 429 (1968).
- 56*. *Davidson F., Mandel L.*, Phys. Lett., **27A**, 579 (1968).
- 57*. *Chang R. F., Korenman V., Alley C. O., Detenbeck R. W.*, Phys. Rev., **178**, 2, 612 (1969).
- 58*. *Cantrell C. D., Lax M., Smith W. A.*, Phys. Rev., **7A**, 175 (1973).
- 59*. *Chora S., Mandel L.*, Phys. Rev. Lett., **30**, 60 (1973).
- 60*. *Андропова И. А., Зайцев Ю. И.*, Изв. вуз., Радиофизика, **11**, 149 (1968).
- 61*. *Андропова И. А.*, ЖЭТФ, **56**, 417 (1969).
- 62*. *Зайцев Ю. И.*, Изв. вуз., Радиофизика, **13**, 898 (1970).
- 63*. *Paoli T. L., Ripper J. E.*, Phys. Rev., **2A**, 2551 (1970).
- 64*. *Arecchi F. T., Degiorgio V.*, Phys. Rev., **3A** 1108 (1971).
- 65*. *Steer W. H.*, Proc. IEEE, **54**, 11 (1966).
- 66*. *Бакланов Е. В., Раутиан С. Г., Трошин Б. И., Чеботаев В. П.*, ЖЭТФ, **56**, 1120 (1969).
- 67*. *Gordon J. P., Aslaksen T. W.*, IEEE Journ. Quantum Electronics, **QE-6**, 7 (1970).
- 68*. *Sargent M., Scully M., Lamb W. Jr.*, Appl. Optics, **9**, 11 (1970).
- 69*. *Зайцев Ю. И., Степанов Д. П.*, ЖЭТФ, **55**, 1645 (1968).
- 70*. *Arrathoon R., Siegman A. E.*, Journ. Appl. Phys., **40**, 910 (1969).
- 71*. *Егоров Ю. П.*, Письма ЖЭТФ, **8**, 525 (1968).

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЛАЗЕРА — ПРОБЛЕМА НЕРАВНОВЕСНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

М. Скалли¹⁾

Введение

В этих лекциях развивается теория лазера, в которой как поле, так и атомная среда описываются с помощью законов квантовой механики. В данной работе изложение соответствует квантовой теории лазера [1—3], но при этом используется значительно более упрощенная модель, чтобы подчеркнуть физическое содержание теории. Теория лазера является в сущности проблемой неравновесной квантовой статистической механики. Будем искать уравнение движения для матрицы плотности лазерного излучения и определим эволюцию этой матрицы под действием нетермического резервуара, описывающего возбужденную среду, и термического резервуара, описывающего эффекты потерь в резонаторе. Наша теория будет развиваться по линии полуклассической теории лазера [4—6].

Прежде чем приступить к квантовой теории, изложим вкратце полуклассическую теорию в наиболее подходящей для наших целей форме, т. е. пренебрегая интересными, но не существенными усложнениями за счет атомного распада, доплеровского движения, затягивания частоты и т. д. Затем мы обрисует в общих чертах квантовую теорию излучения и рассмотрим те вопросы неравновесной статистической механики, которые необходимы для надлежащего понимания проблемы. С помощью этого метода можно найти уравнение движения для матрицы плотности лазерного излучения $\rho_{n, n'}(t)$. Получив это уравнение движения, мы переходим к его решению для определения статистики фотонов стацио-

¹⁾ М. Scully, Department of Physics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.

нарного состояния выше, ниже и на пороге генерации. Далее рассматривается временная эволюция к такому стационарному состоянию. Приведена статистика фотоэлектронов, используемая в полностью квантовой теории лазера. В заключении показано, как знание матрицы плотности $\rho_{n, n'}(t)$ позволяет ответить на вопросы, связанные с измерением поля излучения, такие, например, как профиль спектральной линии.

§ 1. Полуклассическая теория лазера

1.1. *Сущность теории лазера.* Рассмотрим ансамбль возбужденных двухуровневых атомов (верхнее состояние $|\psi_a\rangle$, нижнее состояние $|\psi_b\rangle$), помещенных между зеркалами резонатора лазера в момент времени $t = 0$. Предположим, что в этот начальный момент времени в резонаторе существует малое электрическое поле. Под действием этого поля атомы начинают осциллировать подобно крошечным диполям¹⁾. В сумме эти атомные диполи создают макроскопическую поляризацию единицы объема. В свою очередь макроскопический дипольный момент возбуждает поле, т. е. действует как источник излучения. Теорию лазера в том виде, как она была сформулирована Лэмбом [4—6], можно свести к трем этапам.

1) Полагая, что на атом (например, i -й атом), инжектированный в резонатор лазера, действует начальное поле $\mathbf{E}(r, t)$, вычислим согласно законам квантовой механики атомную поляризацию $\langle \mathbf{p}^i \rangle$.

2) Эти атомные диполи в сумме дают макроскопический дипольный момент единицы объема

$$\mathbf{P}(r, t) = \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{p}^i(r, t) \rangle,$$

где N — число возбужденных «лазерных» атомов в единице объема резонатора в момент времени t . Если

¹⁾ Отметим, что ни в верхнем состоянии $|\psi_a\rangle$, ни в нижнем состоянии $|\psi_b\rangle$ атомы не имеют дипольного момента. Только при «стимулировании» атомов внешним полем возникает дипольный момент, который затем «испускает» или излучает энергию.

возбуждение однородно, то можно записать

$$\mathbf{P}(r, t) = N \langle \mathbf{p}(r, t) \rangle.$$

3) В соответствии с уравнениями Максвелла эта поляризация $\mathbf{P}(r, t)$ возбуждает лазерное поле.

Ясно, что изложенная процедура представляет собой по существу самосогласованную теорию поля. Предполагается, что каждый атом эволюционирует в поле, приготовленном для него всеми остальными атомами; затем определяется поле, созданное многими такими эволюционирующими атомами. Таким образом, проблема лазера напоминает проблему ферромагнетика, когда каждый спин реагирует на среднее магнитное поле всех остальных спинов и подстраивается соответствующим образом, внося тем самым вклад в среднее магнитное поле. В нашем случае каждый атом в лазере взаимодействует с электромагнитным полем, создаваемым всеми остальными атомами, и вносит свой вклад в поле посредством вынужденного излучения.

Перейдем теперь к изложению полуклассической теории, уделяя основное внимание вопросам, важным для квантовой теории лазера. В разд. 1.2 будут записаны уравнения Максвелла в удобном для нас виде, а в разд. 1.3 мы найдем атомную поляризацию. Условия генерации лазера будут сформулированы в разд. 1.4.

1.2. Уравнения Максвелла в приближении медленно меняющихся фазы и амплитуды. Из уравнений Максвелла в системе МКС

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \end{aligned} \right\} (1.1)$$

мы находим волновое уравнение

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \mathbf{J} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} [\mu_0 \sigma \mathbf{E} + \mu_0 (\epsilon_0 \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{P}})]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Член проводимости \mathbf{J} соответствует потерям в резонаторе (резонаторной добротности Q), которые заменяются фиктивным омическим током $\sigma \mathbf{E}$.

Используя тождество

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

и тот факт, что для газового лазера

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \sim \nabla \cdot \mathbf{P} \approx 0,$$

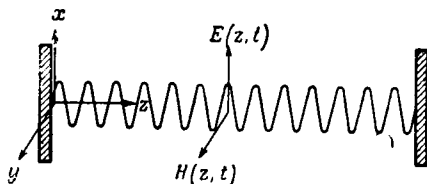
уравнение (1.2) можно записать в виде

$$-\nabla^2 \mathbf{E} + \mu_0 \sigma \dot{\mathbf{E}} + \mu_0 \epsilon_0 \ddot{\mathbf{E}} = -\mu_0 \ddot{\mathbf{P}}. \quad (1.3)$$

Для простоты будем считать электрическое поле линейно поляризованным в направлении x (фиг. 1). Разлагая поле по нормальным модам

$$E(z, t) = \sum_n A_n(t) \sin \frac{n\pi z}{L}$$

и подставляя это выражение для электрического поля в уравнение (1.3), получаем соотношение, связывающее



Фиг. 1. Схематическое представление линейно поляризованной стоячей волны лазерного излучения.

поляризацию с амплитудами нормальных мод

$$\ddot{A}_n + \frac{\nu}{Q} \dot{A}_n + \Omega_n^2 A_n = \frac{\nu^2}{\epsilon_0} P_n(t). \quad (1.4)$$

Здесь: 1) мы подобрали проводимость σ так, чтобы она соответствовала нужному значению Q

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\nu}{Q};$$

2) $\Omega_n = n\pi c/L$ — частота резонатора;

3) член \dot{P} заменен на $-\nu^2 P$ (временная зависимость поляризации в главном порядке имеет вид $e^{i\nu t}$);

4) $P_n = (2/L) \int_0^L dz P(z, t) \sin(n\pi z/L)$ — проекция поляризации на n -ю моду.

Относительно уравнения (1.4) необходимо сделать несколько замечаний.

1. Это уравнение осциллятора с затуханием, на который действует вынуждающая сила.

2. Искусственно введенный механизм затухания $J = \sigma E$ описывает потери энергии в резонаторе. Такой механизм необходим в теории, но его детали сами по себе интереса не представляют.

3. Нужно вычислить вынуждающий член P_n . Когда описываемая этим членом вынуждающая сила известна, можно определить лазерное поле.

Продолжим наше рассмотрение, считая амплитуду и фазу n -й нормальной моды медленно меняющимися (на оптическом периоде)

$$A_n(t) = E_n(t) \cos(\nu_n t + \varphi_n(t)) \quad (1.5)$$

и разделяя проекцию $P_n(t)$ вынуждающей поляризации на n -ю моду на компоненту, синфазную с электрическим полем, и компоненту, сдвинутую по фазе на $\pi/2$ (кватратурную):

$$P_n(t) = S_n(t) \sin(\nu_n t + \varphi_n(t)) + C_n(t) \cos(\nu_n t + \varphi_n(t)). \quad (1.6)$$

Подставляя (1.5) и (1.6) в (1.4), находим

$$\begin{aligned} & \left\{ \ddot{E}_n - (\nu_n^2 + 2\dot{\nu}_n + \dot{\varphi}_n^2) E_n + \frac{\nu}{Q} \dot{E}_n + \Omega_n^2 E_n \right\} \cos(\nu_n t + \varphi_n(t)) + \\ & + \left\{ -2\dot{E}_n(\nu_n + \dot{\varphi}_n) - \ddot{\varphi}_n E_n - \frac{\nu}{Q} (\nu_n + \dot{\varphi}_n) E_n \right\} \sin(\nu_n t + \varphi_n(t)) = \\ & = \frac{\nu^2}{\epsilon_0} S_n \sin(\nu_n t + \varphi_n(t)) + \frac{\nu^2}{\epsilon_0} C_n \cos(\nu_n t + \varphi_n(t)). \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при синусных и косинусных членах и сохраняя только главный порядок, мы

получаем два уравнения:

$$(\nu_n + \dot{\phi} - \Omega_n) E_n = - \frac{\nu}{2\epsilon_0} C_n, \text{ фазовое уравнение, (1.7)}$$

$$\dot{E}_n + \frac{\nu}{2Q} E_n = - \frac{\nu}{2\epsilon_0} S_n, \text{ амплитудное уравнение. (1.8)}$$

1.3. Атомная поляризация

1.3.1. Уравнение движения для атомов. Чтобы определить вынуждающие члены (C_n и S_n), необходимо вычислить макроскопическую поляризацию среды. Рассмотрим сначала поляризацию, индуцируемую лазерным полем в отдельном атоме. Когда атом, возбужденный на верхний лазерный уровень ψ_a , вводится внутрь резонатора, он поляризуется лазерным полем и из верхнего квантового состояния

$$\psi(r, t_0) = \psi_a(r)$$

переходит в линейную суперпозицию состояний

$$\psi(r, t) = a(t) \psi_a(r) + b(t) \psi_b(r). \quad (1.9)$$

Через время T атом удаляется из резонатора.

Рассмотрим поляризацию атома, находящегося в этой линейной комбинации состояний. Если определить электронную плотность посредством выражения

$$\sigma = \psi^*(r, t) \psi(r, t),$$

то атомный дипольный момент i -го атома примет вид

$$\begin{aligned} \langle p_s \rangle &= e \int r \sigma dr = \\ &= e \int dr [a^*(t) \psi_a^*(r) + b^*(t) \psi_b^*(r)] r [a(t) \psi_a(r) + b(t) \psi_b(r)] = \\ &= e r_{ab} [a^* b + \text{компл. сопр.}] = \mathcal{P} [\sigma_{ba} + \text{компл. сопр.}], \quad (1.10) \end{aligned}$$

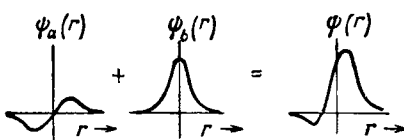
где

$$r_{ab} = \int \psi_a^* r \psi_b dr \quad \text{и} \quad \mathcal{P} = e r_{ab}.$$

Физический смысл этих формул становится понятным после рассмотрения распределения заряда такой линейной суперпозиции состояний. Из фиг. 2 видно, что перемешивание состояний a и b лазерным полем приводит

к асимметрии зарядового облака и создает атомный дипольный момент.

Задача состоит в нахождении диполя $\langle p^i \rangle$, для чего необходимо вычислить $a(t)$ и $b(t)$, или, точнее, найти билинейную комбинацию $b(t)a^*(t)$, которая представляет собой элемент σ_{ab} атомной матрицы плотности¹⁾:



$$\sigma = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} (a^*(t) b^*(t)) = \begin{pmatrix} |a(t)|^2 & a(t) b^*(t) \\ b(t) a^*(t) & |b(t)|^2 \end{pmatrix}.$$

Фиг. 2. Суперпозиция атомных волновых функций $\psi_a(r)$ и $\psi_b(r)$, создающая результирующую асимметрию в распределении электронного заряда, которая приводит к возникновению электрического дипольного момента.

Полный гамильтониан в матричной форме принимает вид

$$H = \begin{pmatrix} W_a & V(t) \\ V(t) & W_b \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

где W_a и W_b — энергии верхнего и нижнего уровней и $V(t) = -er_{ab} \cdot \mathbf{E}(t)$ — энергия взаимодействия, как показано в приложении. Из уравнения Шредингера в матричной форме ($\hbar = 1$)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} W_a & V(t) \\ V(t) & W_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -i(H_0 + V) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

непосредственно следует, что уравнение движения для матрицы плотности имеет вид

$$\dot{\sigma} = \begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix} (a^* b^*) + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} (\dot{a}^* \dot{b}^*) = -i(H_0 + V)\sigma + i\sigma(H_0 + V), \quad (1.13)$$

или

$$\dot{\sigma} = -i[H_0 + V, \sigma]. \quad (1.14)$$

1.3.2. Решение по теории возмущений для $\sigma(t)$. Для решения уравнения (1.14) удобно пе-

¹⁾ Атомная матрица плотности $\sigma(t)$ в работах [4—6] обозначена через $\rho(t)$. Здесь же мы хотим сохранить символ ρ для обозначения матрицы плотности в представлении взаимодействия.

рейти в представление взаимодействия¹⁾, т. е. определить новую матрицу плотности $\rho(t)$ следующим образом:

$$\sigma(t) = \exp[-iH_0 t] \rho(t) \exp[iH_0 t]. \quad (1.15)$$

Тогда уравнение (1.14) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp[-iH_0 t] \rho(t) \exp[iH_0 t] = \\ = -i[H_0 + V, (\exp[-iH_0 t] \rho(t) \exp[iH_0 t])], \end{aligned} \quad (1.16)$$

и мы находим уравнение для матрицы плотности $\rho(t)$ в представлении взаимодействия

$$\dot{\rho}(t) = -i[V_I(t) \rho(t)], \quad (1.17)$$

$$V_I(t) = \exp[iH_0 t] V(t) \exp[-iH_0 t]. \quad (1.18)$$

Здесь $V_I(t)$ — гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия, тогда как $V(t)$ есть гамильтониан взаимодействия в шредингеровом представлении и зависит от времени только вследствие временной зависимости электрического поля. Преимущество представления взаимодействия состоит в том, что оно очень удобно при разложении по теории возмущений.

Выражение (1.17) можно записать в виде интегрального уравнения

$$\rho(t) = \rho(t_0) + (-i) \int_{t_0}^t [V_I(t'), \rho(t')] dt', \quad (1.19)$$

которое решается итерациями обычным способом

$$\rho^{(0)}(t) = \rho(t_0), \quad (1.20)$$

$$\rho^{(1)}(t) = \rho(t_0) + (-i) \int_{t_0}^t [V_I(t'), \rho(t_0)] dt', \quad (1.21)$$

¹⁾ Более подробное обсуждение представления взаимодействия и формализма $U(t, t')$ матрицы см. в работе [7].

$$\rho^{(2)}(t) = \rho(t_0) + (-i) \int_{t_0}^t dt' [V_I(t'), \rho(t_0)] +$$

$$+ (-i)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' [V_I(t'), [V_I(t''), \rho(t_0)]], \quad (1.22)$$

$$\rho^{(n)}(t) = \rho(t_0) + \sum_{s=1}^n (-i)^s \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots$$

$$\dots \int_{t_0}^{t_{s-1}} dt_s [V_I(t_1), [V_I(t_2) \dots [V_I(t_s), \rho(t_0)] \dots]]. \quad (1.23)$$

1.3.3. Матричная алгебра для $V_I(t)$. Прежде чем продолжать вычисления по теории возмущений, представим после небольших матричных манипуляций функцию $V_I(t)$ в более удобной форме. Поскольку матрица H_0 диагональна, можно записать

$$\exp[iH_0 t] = \sum_n \frac{(it)^n}{n!} \begin{pmatrix} W_a & 0 \\ 0 & W_b \end{pmatrix}^n =$$

$$= \sum_n \begin{pmatrix} \frac{(itW_a)^n}{n!} & 0 \\ 0 & \frac{(itW_b)^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp[itW_a] & 0 \\ 0 & \exp[itW_b] \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

С учетом (1.24) выражение (1.18) принимает вид

$$V_I(t) = \begin{pmatrix} \exp[iW_a t] & 0 \\ 0 & \exp[iW_b t] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & V(t) \\ V(t) & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \exp[-iW_a t] & 0 \\ 0 & \exp[-iW_b t] \end{pmatrix} = -\mathcal{P}E_n(t) \sin \frac{n\pi z}{L} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & \exp[i(W_a - W_b)t] \cos(\nu n t + \varphi_n) \\ \exp[-i(W_a - W_b)t] \cos(\nu n t + \varphi_n) & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

В приближении вращающегося поля (что означает пренебрежение быстро осциллирующими членами) выра-

жение (1.25) записывается в виде

$$V_I(t) \approx -\frac{1}{2} \mathcal{P} E(t) \sin \frac{n\pi z}{L} \times \\ \times \begin{pmatrix} 0 & \exp[i(\omega - \nu_n)t - i\varphi(t)] \\ \exp[-i(\omega - \nu_n)t + i\varphi(t)] & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

где $\omega = W_a - W_b$.

Для удобства будем считать наш резонатор настроенным на частоту атомного перехода, так что (1.26) принимает вид

$$V_I(t) = -\left(\frac{\mathcal{P}}{2} E(t) \sin \frac{n\pi z}{L}\right) \begin{pmatrix} 0 & \exp[-i\varphi(t)] \\ \exp[i\varphi(t)] & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

1.3.4. Первый порядок теории возмущений. Решение для $\sigma(t)$ в первом порядке теории возмущений находим из (1.21), используя для $V_I(t)$ выражение (1.27) и начальное условие $\rho(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. В результате получаем

$$\rho^{(1)}(t_0 + T) = \rho(t_0) - i \int_{t_0}^{t_0+T} -\frac{1}{2} \mathcal{P} E(t') \sin \left(\frac{n}{L} \pi z\right) \times \\ \times \left[\begin{pmatrix} 0 & \exp[-i\varphi(t')] \\ \exp[i\varphi(t')] & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \right. \\ \left. - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \exp[-i\varphi(t')] \\ \exp[i\varphi(t')] & 0 \end{pmatrix} \right] dt'. \quad (1.28)$$

Считая $E(t)$ и $\varphi(t)$ постоянными на временном интервале $t_0 \rightarrow t_0 + T$, так что их можно вынести из-под интеграла, имеем

$$\begin{pmatrix} \rho_{aa}^{(1)} & \rho_{ab}^{(1)} \\ \rho_{ba}^{(1)} & \rho_{bb}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - i \left(\frac{1}{2} \mathcal{P} E(t) \sin \frac{n\pi z}{L}\right) \times \\ \times \begin{pmatrix} 0 & \exp[-i\varphi(t)] \\ -\exp[+i\varphi(t)] & 0 \end{pmatrix} \int_{t_0}^{t_0+T} dt'. \quad (1.29)$$

Следовательно, в представлении взаимодействия получаем

$$\rho_{ab}^{(1)}(t) = -i \frac{1}{2} \mathcal{P} E(t) T \sin \frac{n\pi z}{L} \exp[-i\varphi(t)], \quad (1.30a)$$

а в шредингеровском представлении

$$\sigma_{ab}^{(1)}(t) = -i \frac{1}{2} \mathcal{P} E(t) \sin \frac{n\pi z}{L} \exp[-i(\omega t + \varphi(t))], \quad (1.30б)$$

где $t \equiv t_0 + T$.

Зная $\sigma_{ab}(t)$, можно представить атомный дипольный момент i -го атома в виде

$$\begin{aligned} \langle p^i \rangle &= \mathcal{P} (\sigma_{ab}^i(t) + \sigma_{ba}^i(t)) = \\ &= -\mathcal{P}^2 T \sin(\omega t + \varphi) \left[\sin \frac{n\pi z}{L} \right] E(t). \end{aligned} \quad (1.31)$$

1.4. *Атомная поляризация — макроскопическая поляризация.* Макроскопическую поляризацию (в первом порядке теории возмущений) можно получить¹⁾ простым умножением выражения (1.31) на плотность N атомов, возбужденных в интервале времени $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ в единице объема

$$P^{(1)} = N \langle p^{(1)} \rangle = -N \mathcal{P}^2 T E(t) \sin(\omega t + \varphi) \sin \frac{n\pi z}{L}, \quad (1.32)$$

где учтено, что $\omega = \nu$.

Тогда P_n в уравнении (1.4) определяется выражением

$$P_n(t) = -\{N T \mathcal{P}^2 E(t)\} \sin(\nu t + \varphi), \quad (1.33a)$$

а синфазный и квадратурный коэффициенты C_n и S_n оказываются равными соответственно

$$C_n = 0, \quad (1.33б)$$

$$S_n = -N T \mathcal{P}^2 E(t). \quad (1.33в)$$

¹⁾ Более реалистический подход, включающий интегрирование по случайным временам инжекции атомов, изложен в работе [5]. Однако использованная здесь простая модель достаточна для наших целей.

С учетом этих выражений для C_n и S_n уравнения (1.7) и (1.8) принимают вид

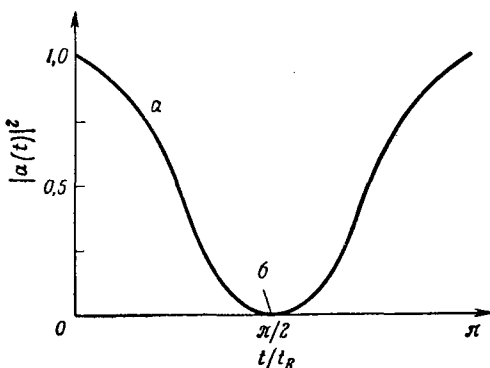
$$\dot{\phi}E + (\nu_n - \Omega_n) E = 0, \quad (1.34)$$

$$\dot{E}(t) + \frac{1}{2} \frac{\nu}{Q} E(t) = AE, \quad (1.35)$$

где

$$A = \frac{\nu}{2\epsilon_0} NT\mathcal{P}^2. \quad (1.36)$$

Из уравнения (1.34) следует, что в стационарном состоянии $\nu_n = \Omega_n$; это просто означает отсутствие заты-



Фиг. 3. Кривая Раби для двухуровневой системы $t_R^{-1} = \mathcal{P}E/\hbar$.
 а — линейный режим; б — нелинейный режим.

гивания частоты в случае, если атомы резонансны с полем.

1.4.1. Пороговые условия (линейная теория). Если линейное усиление превышает потери, то возможен процесс усиления. Тогда из уравнения (1.35) получаем

$$A = \frac{\nu}{2\epsilon_0} \mathcal{P}^2 NT > \frac{1}{2} \frac{\nu}{Q}. \quad (1.37)$$

Необходимо отметить, что при $A < 1/2(\nu/Q)$ единственным стационарным значением интенсивности поля является нулевое. Мы увидим, что квантовая теория предсказывает значительную интенсивность даже ниже порога генерации.

1.4.2. Нелинейная теория. При линейном подходе пренебрегают уменьшением заселенности, что справедливо только для малых полей. Это становится понятным, если рассмотреть кривую Раби для атома, первоначально находившегося на верхнем уровне, как показано на фиг. 3. Чтобы получить условия стационарной генерации лазера выше порога, необходимо вычислить $\rho(t)$ в следующем исчезающем порядке теории возмущений. Возвращаясь к уравнению (1.17), решим его относительно $\rho_{ab}(t)$ в третьем порядке теории возмущений

$$\rho_{ab}(t) = \rho_{ab}^{(1)} + \rho_{ab}^{(3)} + \dots$$

Член второго порядка обращается в нуль по соображениям четности. В результате находим следующее выражение для недиагональных элементов:

$$\sigma_{ab}(t) = -(\mathcal{P}NT) \left(1 - \frac{\mathcal{P}^2 T^2}{8} E^2 \sin^2 \frac{n\pi z}{L} \right) \times \\ \times E \sin \frac{n\pi z}{L} \sin(vt + \varphi), \quad (1.37a)$$

которое приводит к нелинейному амплитудному уравнению

$$\dot{E} = \left(A - \frac{v}{2Q} \right) E - BE^3, \quad (1.38)$$

где через

$$B = \mathcal{P}^4 \frac{T^3 N}{8} \left(\frac{3}{4} \right) \left(\frac{v}{2\epsilon_0} \right) \quad (1.39)$$

обозначен параметр насыщения. В стационарном состоянии ($\dot{E} = 0$) мы получим важное соотношение для интенсивности колебаний

$$E^2 = \frac{1}{B} \left(A - \frac{v}{2Q} \right). \quad (1.40)$$

1.4.3. Сводка результатов полуклассической теории, имеющих важное значение в квантовой теории лазера.

1. Полуклассическая теория исходит из двух взаимно дополнительных дифференциальных уравнений: одного для поля [уравнение (1.4)] и другого для атомов [уравнение (1.13)].

2. Каждый из атомов взаимодействует только с полем (взаимодействием с другими атомами, за исключением их вклада в поле, пренебрегаем).

3. Каждый атом живет короткое (10^{-8} с) время по сравнению с временем затухания (или возрастания) поля (10^{-6} с); по этой причине мы можем в уравнении (1.29) считать $E(t)$ и $\varphi(t)$ константами. Другими словами, один атом изменяет поле не очень сильно.

4. Чтобы определить интенсивность в стационарном состоянии, необходимо рассмотреть нелинейные эффекты.

5. $E^2 = (1/B)(A - v/2Q) =$ интенсивность поля = $\frac{\text{усиление} - \text{потери}}{\text{параметр насыщения}}$.

Приложение

A · p или E · x?

Поскольку при изучении атомных проблем вопрос выбора правильного гамильтониана¹⁾ является фундаментальным, рассмотрим задачу об электроном, связанном потенциалом $V(x)$ с расположенным в точке R силовым центром. Весь атом «погружен» в плоскую электромагнитную волну, которая описывается векторным потенциалом $A(R + x, t)$. В дипольном приближении этот векторный потенциал может быть записан при $kx \ll 1$ следующим образом:

$$A(x + R, t) = A(t) \exp[ik \cdot (R + x)] = \\ = A(t) \exp[ik \cdot R] (1 + ikx + \dots) \approx A(t) \exp[ik \cdot R]. \quad (\text{П. 1})$$

Уравнение Шредингера (в дипольном приближении) в этом случае принимает вид

$$i\hbar\psi(x, t) = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c} A(R, t) \right)^2 \psi(x, t) + V(x) \psi(x, t). \quad (\text{П. 2})$$

¹⁾ Как было отмечено в работе [8], при записи гамильтониана взаимодействия для связанных зарядов через векторный потенциал необходимо соблюдать осторожность (см. [9, 10]).

Определим новую волновую функцию $\psi(x, t)$ с помощью соотношения

$$\psi(x, t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{e}{c} A(R, t) x\right] \varphi(x, t). \quad (\text{П. 3})$$

Подставляя (П.3) в (П.2), находим

$$\begin{aligned} & \left[i\hbar \left(\frac{i}{\hbar} \frac{e}{c} \dot{A}(R, t) x \right) \varphi(x, t) + i\hbar \dot{\varphi}(x, t) \right] \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{e}{c} A(R, t) x\right] = \\ & = \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{e}{c} A(R, t) x\right] \left[\frac{\hbar}{i} \left(\frac{1}{2m} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{\hbar} \frac{e}{c} A(R, t) \right) + \right. \\ & \left. + \frac{e}{c} A(R, t) \right]^2 \varphi(x, t) + \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{e}{c} A(R, t) x\right] V(x) \varphi(x, t). \end{aligned} \quad (\text{П. 4})$$

Производя приведение подобных членов и опуская экспоненциальный множитель, мы получаем для (П.4) следующее выражение:

$$-\frac{e x}{c} \dot{A}(R, t) \varphi + i\hbar \dot{\varphi} = \left(\frac{p_x^2}{2m} + V(x) \right) \varphi. \quad (\text{П. 5})$$

Поскольку $E = -(1/c) \dot{A}$, то

$$i\hbar \dot{\varphi}(x, t) = H_0 \varphi(x, t) - e x E(R, t) \varphi(x, t). \quad (\text{П. 6})$$

Таким образом, мы видим, что при записи взаимодействия через электрическое поле сохраняется член A^2 из выражения (П.2), и поэтому записанный через электрическое поле гамильтониан является правильным гамильтонианом для тех проблем атомной физики, для которых справедливо дипольное приближение.

§ 2. Квантовая теория излучения и статистическая физика

В этом параграфе мы изложим квантовую теорию излучения, которая приводит к следующему выражению для оператора электрического поля:

$$E = \sum_s \mathcal{E}_s (a_s + a_s^\dagger) \sin k_s z,$$

где множитель \mathcal{E}_s имеет смысл электрического поля на один фотон, а a_s^\dagger и a_s — операторы рождения и

уничтожения для s -й моды поля. Будут рассмотрены когерентные состояния поля и получен гамильтониан для двухуровневого атома, взаимодействующего с квантованым лазерным полем.

Вводится оператор плотности

$$\rho = \sum_{\psi} P_{\psi} |\psi\rangle \langle \psi|$$

и его применение иллюстрируется при рассмотрении матриц плотности для теплового и когерентного излучений. Вводится и подробно обсуждается концепция приведенной матрицы плотности.

2.1. Обзор квантовой теории излучения

2.1.1. Квантование поля излучения [11—13]¹⁾. Содержащаяся в поле энергия представляет собой сумму электрической и магнитной энергий

$$H = \frac{1}{2} \int dr (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2). \quad (2.1)$$

Разлагая поле по нормальным модам с соответствующей нормировкой, получаем

$$E_x = \sum_s \left[\frac{2\Omega_s^2 M_s}{V\epsilon_0} \right]^{1/2} q_s \sin k_s z, \quad (2.2a)$$

$$H_y = \sum_s \left[\frac{2\Omega_s^2 M_s}{V\epsilon_0} \right]^{1/2} \frac{\dot{q}_s \epsilon_0}{k_s} \cos k_s z, \quad (2.2b)$$

где множитель M_s отвечает фиктивной массе осциллятора поля, q_s — амплитуда нормальной моды, имеющая размерность длины, $k_s = s\pi/L$, где $s = 1, 2, 3, \dots$ и $\Omega_s = s\pi c/L$ — собственная частота резонатора. Эффективный объем резонатора обозначен через V . После подстановки выражений (2.2a) и (2.2b) в уравнение (2.1)

¹⁾ В книге [11] приведено, по-видимому, лучшее изложение общих вопросов. Работа [12] содержит очень ясное изложение квантовой электродинамики и других проблем современной теории поля. Книга Гайтлера [13] остается классической работой в этой области. В приведенном изложении квантования поля без использования векторного потенциала мы следовали рассмотрению Скалли и Лэмба [3].

энергия поля может быть записана в виде суммы энергий всех мод

$$H = \frac{1}{2} \sum_s \left[M_s \Omega_s^2 q_s^2 + \frac{p_s^2}{M_s} \right]. \quad (2.3)$$

Как известно, между динамической проблемой одной моды электромагнитного поля и простым механическим гармоническим осциллятором имеется аналогия. Мы вставили в уравнения (2.2а) и (2.2б) величину M_s , имеющую размерность массы, чтобы подчеркнуть эту аналогию. Эквивалентный механический осциллятор будет иметь массу M_s и декартову координату q_s . Проквантуем теперь каждую из мод поля, полагая просто

$$[p_s, q_{s'}] = -i\hbar \delta_{s,s'}, \quad [p_s, p_{s'}] = [q_s, q_{s'}] = 0. \quad (2.4)$$

Прделаем еще обычное преобразование к операторам a и a^\dagger :

$$\begin{aligned} a_s &= [2M_s \hbar \Omega_s]^{-1/2} (M_s \Omega_s q_s + ip_s), \\ a_s^\dagger &= [2M_s \hbar \Omega_s]^{-1/2} (M_s \Omega_s q_s - ip_s). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Подстановка (2.5) и (2.3) приводит к известному выражению

$$H = \hbar \sum_s \left(a_s^\dagger a_s + \frac{1}{2} \right) \Omega_s. \quad (2.6)$$

Коммутационные соотношения между операторами a^\dagger и a находятся из уравнений (2.4) и (2.5)

$$[a_s, a_{s'}^\dagger] = \delta_{s,s'}, \quad [a_s, a_{s'}] = [a_s^\dagger, a_{s'}^\dagger] = 0. \quad (2.7)$$

Эти операторы являются обычными операторами повышения и понижения (рождения и уничтожения), которые действуют на n_s -фотонные состояния следующим образом:

$$a_s |n_s\rangle = \sqrt{n_s} |n_s - 1\rangle, \quad (2.8a)$$

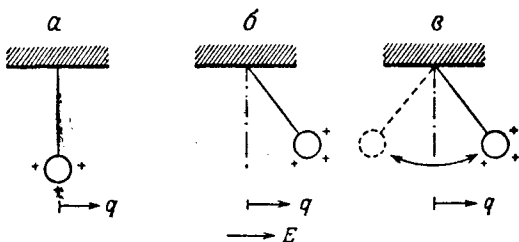
$$a_s^\dagger |n_s\rangle = \sqrt{n_s + 1} |n_s + 1\rangle. \quad (2.8б)$$

Оператор электрического поля (2.2а) можно теперь записать через операторы a и a^\dagger в виде

$$E = \sum_s \mathcal{E}_s (a_s + a_s^\dagger) \sin k_s z, \quad (2.9)$$

где множитель $\mathcal{E}_s = (\hbar\Omega_s/V\epsilon_0)^{1/2}$ соответствует электрическому полю «одного фотона».

2.1.2. Когерентные состояния поля. Несмотря на то что формализм когерентных состояний ясно изложен в ряде работ [14—16]¹⁾, для неспециалистов может оказаться полезным физическое истолкование этих состояний. Для лучшего понимания когерентных состояний (введем для них обозначение $|\alpha\rangle$) рассмотрим следующую физическую аналогию, объясняющую возникновение такого состояния.



Ф и г. 4. Приведение классического маятника в состояние простого колебательного движения.

а — до включения поля; б — поле включено; в — поле выключено.

Если мы хотим привести маятник в состояние простого гармонического колебания, то для этого можно приложить поле к заряженному шарикю маятника, перевести его в новое положение, а затем отключить поле и дать возможность шарикю совершать колебания, как показано на фиг. 4. Рассматривая эту же самую картину квантовомеханически, мы имеем первоначально следующую волновую функцию основного состояния (массу маятника M и \hbar полагаем равными единице):

$$|\psi_{\text{нач}}(q)|^2 = \left| \left(\frac{\nu}{\pi} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{\nu}{2} q^2 \right] \right|^2. \quad (2.10)$$

¹⁾ Лекции Глаубера 1964 г. «Оптическая когерентность и статистика фотонов» (см. перевод в книге «Квантовая оптика и квантовая радиофизика», изд-во «Мир», 1966) необходимо прочесть каждому исследователю в этой области. В статье Мандела [16] обсуждается связь между классической и квантовой теорией когерентности. Библиография этой статьи содержит ссылки на другие работы.

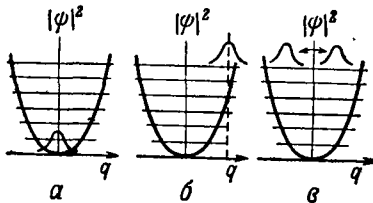
После включения поля мы приходим к смещенному основному состоянию

$$|\Psi_{\text{вкл}}^{\text{поле}}(q)|^2 = \left| \left(\frac{\nu}{\pi} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{\nu}{2} (q - d)^2 \right] \right|^2, \quad (2.11)$$

а затем после выключения поля плотность вероятности принимает вид ¹⁾

$$|\Psi_{\text{выкл}}^{\text{поле}}(q)|^2 = \left(\frac{\nu}{\pi} \right)^{1/4} \exp \left[-\nu (q - d \cos \nu t)^2 \right], \quad (2.12)$$

осциллируя вперед и назад без изменения своей формы, т. е. двигаясь собранно, или «когерентно» ²⁾, как изображено на фиг. 5. Можно показать, что этот пакет



Фиг. 5. Приведение квантованного маятника в состояние простого колебательного движения, т. е. «приготовление» когерентного состояния системы.

a — до включения поля; *b* — поле включено; *в* — поле выключено.

имеет минимальное допустимое квантовой механикой произведение неопределенностей $\Delta p \Delta q = \hbar/2$. Эти состояния являются ближайшими квантовомеханическими аналогами свободного классического одномодового поля и представляют собой фактически когерентные состояния $|\alpha\rangle$ в координатном представлении.

Покажем в заключение, что когерентное состояние является собственной функцией оператора уничтожения.

¹⁾ См. разд. II В в работе [6].

²⁾ В качестве примера состояния, форма которого меняется со временем, можно рассмотреть волновой пакет, имеющий в момент времени $t = 0$ вид дельта-функции $\psi \sim \delta(q - a)$; через четверть периода этот пакет расплывается в плоскую волну и спустя один полный период снова принимает вид дельта-функции.

Рассмотрим смещенный вектор состояния

$$\psi(q) = \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{1}{2} \nu (q-d)^2\right] \quad (2.13)$$

в гейзенберговском представлении; действуя на это состояние оператором уничтожения (в q -представлении), получаем

$$\begin{aligned} a(q) \psi(q) &= \sqrt{\frac{1}{2\nu}} \left(\nu q + \frac{\partial}{\partial q}\right) \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{1}{2} \nu (q-d)^2\right] = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\nu}} \left(\nu q - \frac{1}{2} \nu \cdot 2(q-d)\right) \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{1}{2} \nu (q-d)^2\right] = \\ &= \sqrt{\frac{\nu}{2}} d \psi(q) = \alpha \psi(q), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $\alpha = (\sqrt{\nu/2}) d$.

Воспользуемся общепринятым обозначением $|\psi\rangle = |\alpha\rangle$. Как мы только что выяснили,

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (2.15)$$

С помощью выражения (2.15) легко показать, что в представлении чисел заполнения

$$|\alpha\rangle = \sum_n \left(\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\right) \exp\left[-\frac{|\alpha|^2}{2}\right] |n\rangle. \quad (2.16)$$

Это наиболее полезное выражение для когерентных состояний. Отметим, наконец, что для этих $|\alpha\rangle$ -состояний

$$\langle\alpha|E|\alpha\rangle = \mathcal{E}(\alpha + \alpha^*) \sin kz,$$

поскольку

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

и

$$\langle\alpha|a^\dagger = \langle\alpha|\alpha^*. \quad (2.17)$$

2.1.3. Взаимодействие атома с полем. Рассмотрим теперь взаимодействие двухуровневой системы с одной модой квантованного поля. Состояния двухуровневого атома в спинорной записи принимают вид

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |b\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

где через a и b обозначены верхний и нижний рабочие уровни с частотой перехода между ними $\omega = (W_a - W_b)/\hbar$. Гамильтониан свободного атома $H_0^{\text{атом}}$, определенный в уравнении (1.12), можно записать через операторы «поворота спина»

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \sigma^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

так что

$$H_0^{\text{атом}} = \begin{pmatrix} W_a & 0 \\ 0 & W_b \end{pmatrix} = W_a \sigma^\dagger \sigma + W_b \sigma \sigma^\dagger. \quad (2.20)$$

Гамильтониан взаимодействия классического поля, взаимодействующего с двухуровневой системой,

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{P}E \\ -\mathcal{P}E & 0 \end{pmatrix}_{\text{полуклассич}}$$

принимает после замены классического поля оператором электрического поля (2.9) полностью квантованный вид

$$V = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{P} \left\{ \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{2}} (a + a^\dagger) \right\} \\ -\mathcal{P} \left\{ \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{2}} (a + a^\dagger) \right\} & 0 \end{pmatrix}_{\substack{\text{квантован} \\ \text{поле}}} \quad (2.21)$$

Для простоты мы заменим в (2.9) модовую функцию $\sin(n\pi z/L)$ на $1/\sqrt{2}$. Выражая (2.21) через σ^\dagger и σ и подставляя $H_0^{\text{атом}}$ и $H_0^{\text{поле}}$ в виде (2.20) и (2.6), получаем выражение для полного гамильтониана

$$\begin{aligned} H &= \nu a^\dagger a + W_a \sigma^\dagger \sigma + W_b \sigma \sigma^\dagger + g [\sigma^\dagger (a + a^\dagger) + \sigma (a + a^\dagger)] = \\ &= H_0^{\text{нзл}} + H_0^{\text{атом}} + V, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где константа связи g определяется следующим образом:

$$g = \frac{-ex_{ab}\mathcal{E}}{\sqrt{2}}. \quad (2.23)$$

Записывая V в представлении взаимодействия

$$V(t) = \exp[i(H_0^{\text{изл}} + H_0^{\text{атом}})t] V \exp[-i(H_0^{\text{изл}} + H_0^{\text{атом}})t] \quad (2.24)$$

и используя соотношения коммутации a и a^\dagger и свойства σ и σ^\dagger , нетрудно получить

$$V(t) = g \{ \sigma^\dagger \exp[i\omega t] (a \exp[-i\nu t] + a^\dagger \exp[i\nu t]) + \sigma \exp[-i\omega t] (a \exp[-i\nu t] + a^\dagger \exp[i\nu t]) \}. \quad (2.25)$$

Пренебрегая в (2.25) быстро осциллирующими членами (т. е. ограничиваясь приближением вращающегося поля), мы получаем гамильтониан для квантованного взаимодействия поля с атомом

$$V(t) = g \{ \sigma^\dagger a \exp[i(\omega - \nu)t] + \sigma a^\dagger \exp[-i(\omega - \nu)t] \}. \quad (2.26)$$

2.2. Обзор статистической квантовой механики

2.2.1. Формализм матрицы плотности.

В начале этого параграфа мы ввели в рассмотрение внешнее произведение $|\psi\rangle\langle\psi|$, которое назвали матрицей плотности. Чтобы полностью описать физическую реальность, мы должны теперь дать более общее определение матрицы плотности [17, 18].

Рассмотрим систему (газ, атом, фотонное поле и т. д.), обладающую вектором состояния $|\psi\rangle$. Тогда оператор Q будет иметь квантовомеханическое среднее

$$\langle Q \rangle = \langle \psi | Q | \psi \rangle.$$

Если, однако, мы не знаем достоверно, что система находится в состоянии $|\psi\rangle$, а известна только вероятность P_ψ нахождения в этом состоянии, то самое большее, что можно сделать в этом случае, это вычислить среднее по ансамблю

$$\langle\langle Q \rangle\rangle_{\text{ансамбль}} = \sum_{\psi} P_{\psi} \langle \psi | Q | \psi \rangle. \quad (2.27)$$

Причина введения в квантовую механику матрицы плотности та же самая, по которой вводят в классическую механику функцию распределения. В квантовой

механике наиболее полную (из возможных) информацию о системе дает знание волновой функции этой системы

$$|\psi\rangle = |\psi(q_1 q_2 \dots q_N)\rangle.$$

В классической механике, чтобы определить систему полностью, необходимо знать координаты всех частиц в фазовом пространстве

$$\{q\} = q_1 q_2 \dots q_N,$$

$$\{p\} = p_1 p_2 \dots p_N.$$

В действительности как в квантовой, так и в классической механике мы очень редко имеем такую полную информацию. Обычно нам известна только вероятность $\{q\}$, $\{p\}$ или $|\psi\rangle$. Именно по этой причине вводятся функции распределения и матрицы плотности.

В классическом случае

$P(\{q\}, \{p\})$ = вероятность того, что система будет находиться в состоянии $\{q\} \{p\}$.

В квантовом случае

$P(|\psi\rangle) \equiv P_\psi$ = вероятность того, что система будет иметь вектор состояния $|\psi\rangle$.

Ограничиваясь далее только квантовомеханической ситуацией, рассмотрим значение наблюдаемой величины Q , усредненной по ансамблю состояний $|\psi\rangle$ в соответствии с весом каждого состояния, определяемым вероятностью P_ψ . Используя условие полноты $\sum |n\rangle \langle n| = 1$ состояний $|n\rangle$, перепишем выражение (2.27) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \langle\langle Q \rangle\rangle &= \sum_{\psi} P_{\psi} \sum_n \langle \psi | n \rangle \langle n | Q | \psi \rangle = \\ &= \sum_n \sum_{\psi} P_{\psi} \langle n | Q | \psi \rangle \langle \psi | n \rangle = \text{Sp} \left(Q \sum_{\psi} P_{\psi} | \psi \rangle \langle \psi | \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Определив матрицу плотности (оператор) соотношением

$$\rho = \sum_{\psi} P_{\psi} | \psi \rangle \langle \psi |, \quad (2.29)$$

запишем усредненную по ансамблю величину $\langle \psi | Q | \psi \rangle = \langle Q \rangle$ как

$$\langle \langle Q \rangle \rangle = \text{Sp} (Q\rho). \quad (2.30)$$

Рассмотрим два примера матрицы плотности электромагнитного излучения.

1) *Тепловое излучение в одну моду*

$$\rho = \frac{\exp[-\beta H]}{Z}, \quad (2.31)$$

где $\beta = 1/k_B\theta$, k_B — постоянная Больцмана, θ — температура и $Z = \text{Sp} \exp[-\beta H]$.

В представлении чисел заполнения матрица (2.31) является диагональной

$$\rho_{n,n} = \exp[-\beta \hbar \nu n] (1 - \exp[-\beta \hbar \nu]). \quad (2.32)$$

2) *Полностью когерентный свет*. Для когерентного излучения матрица плотности

$$\rho = |\alpha\rangle \langle \alpha| \quad (2.33)$$

в представлении взаимодействия принимает вид

$$\rho_{n,n'} = \frac{\alpha^n (\alpha^*)^{n'}}{\sqrt{n!n'!}} \exp[-|\alpha|^2]. \quad (2.34)$$

Статистическое распределение фотонов для одной определенной моды дает вероятность нахождения n фотонов в одной этой моде. В $|n\rangle$ -представлении эта вероятность есть $\rho_{n,n}$. Статистические свойства теплового и когерентного излучений могут быть определены из (2.32) и (2.34). Одной из наших целей является нахождение статистики фотонов для лазера.

2.2.2. Приведенная матрица плотности. Часто объектом исследования является система A , взаимодействующая с другой системой B , которая сама по себе интереса не представляет (нас интересует, например, лазерное излучение, но не вызывающие это излучение атомы). Полезное свойство матрицы плотности заключается в том, что мы можем исключить не интересующие нас координаты и следить только за эволюцией нужной нам подсистемы. Рассмотрим оператор

плотности ρ_{AB} . Если мы интересуемся только наблюдаемой подсистемой Q_A , то

$$\langle Q_A \rangle = \text{Sp}_{AB} (I_B Q_A \rho_{AB}) = \text{Sp}_A (Q_A \rho_A),$$

где I_B — единичный оператор и

$$\rho_A \equiv \text{Sp}_B \rho_{AB}. \quad (2.35)$$

Приведенная матрица плотности ρ_A является проекцией полного оператора плотности на подпространство A . В этом случае интерес представляет только система A , тогда как B является ненаблюдаемой (или резервуарной) системой. Можно, следовательно, вычислить матрицу ρ_{AB} для двух взаимодействующих систем, а затем спроецировать эту матрицу на интересующее нас подпространство. Мы будем широко использовать это свойство матрицы плотности.

Исходя из уравнения Шредингера, нетрудно показать, что в общем случае уравнение движения для ρ имеет вид

$$\dot{\rho} = -i[H\rho]. \quad (2.36)$$

Рассмотрим эволюцию во времени двух взаимодействующих ($A + B$) систем; взаимодействие включается в момент времени $t = 0$. В представлении взаимодействия

$$\dot{\rho}_I = -i[V_I(t), \rho_I(t)]. \quad (2.37)$$

Решение уравнения (2.37), согласно (1.23), можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{AB}(t) = & \rho_{AB}(0) + \sum_s (-i)^s \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \\ & \dots \int_0^{t_{s-1}} dt_s [V(t_1) [V(t_2) \dots [V(t_s), \rho_{AB}(0)] \dots]], \end{aligned} \quad (2.38)$$

где

$$\rho_{AB}(0) = \rho_A(0) \otimes \rho_B(0),$$

поскольку в момент времени $t = 0$ системы A и B независимы.

Взяв в уравнении (2.38) след по переменным подсистемы B , получим матрицу

$$\rho_A(t) = \text{Sp}_B \left\{ \rho_A(0) \otimes \rho_B(0) + \sum_s (-i)^s \int dt_1 \dots \dots \int dt_s [V(t_1), [V(t_2) \dots [V(t_s), \rho_A(0) \otimes \rho_B(0)] \dots]] \right\}. \quad (2.39)$$

Полезно рассмотреть в (2.39) члены низших порядков теории возмущений

$$\rho_A(t) = \text{Sp}_B \left\{ \rho_A(0) \otimes \rho_B(0) - \right. \\ \left. - i \int_0^t [V(t'), \rho_A(0) \otimes \rho_B(0)] dt' + \dots \right\} = \underbrace{\rho_A(0)}_{\substack{\text{Начальная матрица} \\ \text{плотности системы } A}} + \\ + \underbrace{\text{Sp}_B \int (-i)[V(t'), \rho_A(0) \otimes \rho_B(0)] dt' + \dots}_{\text{Корреляция, вызванная взаимодействием с системой } B} \quad (2.40)$$

Важно отметить, что в общем случае $\rho_A(t)$ будет находиться в статистически смешанном состоянии, даже если функция $\rho_A(0)$ соответствовала чистому состоянию (с одной волновой функцией). Этот процесс взятия следа по ненаблюдаемым состояниям приводит к необратимой динамике для системы A , т. е. к возникновению «шума»¹⁾.

§ 3. Уравнение движения матрицы плотности лазерного излучения

Изложив полуклассическую теорию в наиболее подходящем для наших целей виде, мы перейдем теперь к «фотонному» описанию работы лазера, используя представления, развитые в предыдущем параграфе.

¹⁾ Обсуждение метода шумовых операторов см. в работе [19] и предшествующих статьях этой серии. (Издательство «Мир» готовит к печати книгу М. Лэкса. — Прим. ред.)

Квантовая теория лазерного излучения является по существу проблемой неравновесной статистической квантовой механики. Будем искать уравнение для крупномасштабного движения матрицы плотности лазерного излучения и рассмотрим ее эволюцию при добавлении (и последующем удалении) большого числа возбужденных атомов. Мы выведем такое уравнение двумя путями, причем основное внимание уделим второму методу.

3.1. *Метод 1¹*). При этом подходе мы будем искать квантовомеханический аналог уравнения Максвелла для поля и выражение, соответствующее вынуждающей атомной поляризации. Очевидно, что полностью квантовая теория лазера должна описываться на языке матрицы плотности, поскольку атомы образуют ненаблюдаемую систему (резервуар). Мы изложим первый метод, обращая внимание на связь с полуклассической теорией, и приведем обоснование для второго метода.

Для правильного описания лазера теория должна включать нелинейную активную среду и механизм затухания. Лазерная накачка описывается путем введения находящихся в верхнем состоянии двухуровневых атомов в произвольные моменты времени t_i и последующего их удаления в моменты $t = t_i + T$. Для простоты изложения рассмотрим неподвижные атомы, взаимодействующие с одномодовым полем.

При квантовом описании работы лазера, как и в полуклассической теории, нас не интересуют детали диссипативного механизма. В данной теории затухание вводится посредством связи поля с ансамблем атомов в основном состоянии (γ -подсистема на фиг. 6). γ -атомы можно рассматривать как атомы, находящиеся первоначально на нижнем уровне φ_1 двухуровневой системы. Атомы накачки образуют α -подсистему. Каждый из активных и пассивных атомов взаимодействует с одной модой лазерного поля посредством рассмотренного выше дипольного взаимодействия. Эта модель схематически

¹) Этот подход был изложен на конференции по квантовой электронике [1] и развит в диссертации автора.

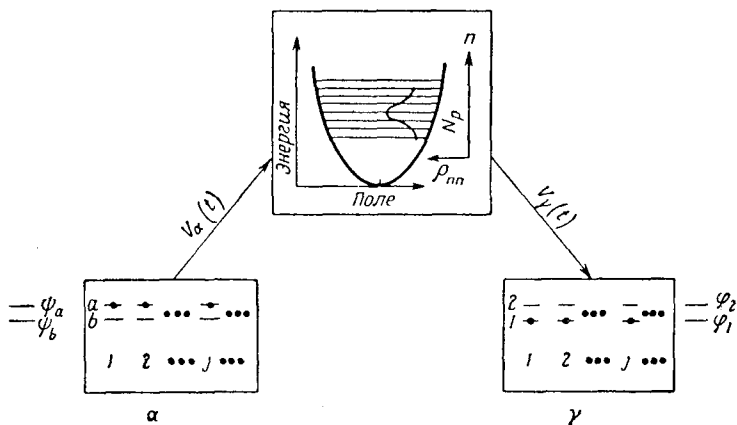
изображена на фиг. 6. Уравнение движения для приведенной матрицы плотности $\rho_{n, n'}$ поля излучения, взаимодействующего с α - и γ -системами, запишется следующим образом:

$$\dot{\rho}_{n, n'} = (-i) \sum_{\{\alpha\}} \sum_{\{\gamma\}} [V_{\alpha}(t) + V_{\gamma}(t), \rho(t)]_{\{\alpha\} \{\gamma\}n, \{\alpha\} \{\gamma\}n'}, \quad (3.1)$$

где

$$\{\alpha\} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N \quad (\alpha_i = \psi_a^i \text{ или } \psi_b^i) \quad (3.2)$$

означает полный набор состояний N активных атомов накачки. Гамильтониан взаимодействия с α -системой



Фиг. 6. Схематическая модель, используемая в лазерной теории. Переменные подсистемы $\{\alpha\}$ соответствуют возбужденным лазерным атомам; переменные резервуара $\{\gamma\}$ соответствуют добротности резонатора Q .

представляет собой сумму гамильтонианов всех отдельных атомов

$$V_{\alpha} = \sum_i V_{\alpha}^i(t). \quad (3.3)$$

Подобные утверждения справедливы и относительно γ -системы. Для $\{\gamma\}$ и V_{γ} имеем

$$\{\gamma\} = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \quad (\gamma_i = \phi_2^i \text{ или } \phi_1^i), \quad (3.4)$$

$$V_{\gamma} = \sum_i V_{\gamma}^i(t). \quad (3.4a)$$

Уравнение (3.1) может быть записано в виде суммы взаимодействий с отдельными активными и пассивными атомами

$$\dot{\rho}_{n, n'}(t) = \underbrace{-i \sum_{\alpha_i=a, b} \sum_i [V_{\alpha}^i(t), \rho^i(t)]_{\alpha_i n, \alpha_i n'}}_{\text{усиление}} - \underbrace{i \sum_{\nu_j=1, 2} \sum_j [V_{\nu}^j(t), \rho^j(t)]_{\nu_j n, \nu_j n'}}_{\text{потери}} \quad (3.5)$$

где

$$\rho^i(t) = \sum_{\{\alpha\}_i} \sum_{\{\nu\}} \rho_{\{\alpha\}_i \{\nu\}, \{\alpha\}_i \{\nu\}} \{\alpha\}_i = \alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \dots \alpha_N \quad (3.6)$$

и

$$\rho^j(t) = \sum_{\{\alpha\}} \sum_{\{\nu\}_j} \rho_{\{\alpha\} \{\nu\}_j, \{\alpha\} \{\nu\}_j} \{\nu\}_j = \nu_1 \dots \nu_{j-1} \nu_{j+1} \dots \nu_n \quad (3.7)$$

суть проекции полной матрицы плотности на пространство поля и i -го активного или j -го пассивного атома соответственно. Уравнение (3.5) вместе с определениями (3.6) и (3.7) представляет собой квантовомеханический аналог уравнения (1.3). Отметим, что характерный временной масштаб в уравнении (3.5) порядка микросекунд, как и в уравнении (1.3). Мы теперь получили описание поля в процессе его эволюции под действием усиления (вынуждающая поляризация) и потерь (добротность резонатора Q). Перейдем к определению $\rho^i(t)$.

Как и в полуклассической теории, мы будем искать решение для $\rho^i(t)$ в приближении, что каждый атом «видит» другие атомы только с помощью поля излучения. Иными словами, каждый атом взаимодействует с лазерным полем, которое в очень хорошем приближении можно считать постоянным в течение времени жизни атома ($\sim 10^{-8}$ с). Уравнение, описывающее взаимодействие i -го атома с квантованным полем, имеет вид

$$\dot{\rho}_{\text{атом}}^i(t) = -i \left[V_{\alpha}^i(t), \rho_{\text{поле}}^i(t) \right], \quad (3.8)$$

где индекс «атом поле» напоминает о том, что мы имеем дело с совместной матрицей плотности $\rho^{(i)}$ i -го

атома и поля. В первом порядке теории возмущений из уравнения (3.8) для i -го атома, инжектированного в поле в момент времени t_i , получаем выражение

$$\rho_{\text{атом поле}}(t_i + T) = \rho_{\text{атом поле}}(t_i) + (-i) \int_{t_i}^{t_i+T} [V_{\alpha}^i(t'), \rho_{\text{атом}}(t_i) \rho_{\text{поле}}(t_i)] dt'. \quad (3.9)$$

Мы имеем, таким образом, два уравнения: одно только для поля и другое — для совместной матрицы плотности i -го атома и поля. Отметим, что, подобно тому как в полуклассической теории мы считали $E(t)$ и $\varphi(t)$ «постоянными» в течение времени жизни одного атома, в квантовой теории атомные времена жизни много меньше времен, характеризующих изменение матрицы плотности излучения (в представлении взаимодействия). Иначе говоря, влияние одного атома на поле мало, и макроскопические эффекты наблюдаются только при действии на поле многих атомов. В заключение мы берем суммы $\sum_i \sum_j$ по всем атомам и получаем уравнение

Таблица 1

Иллюстрация соответствия между полностью квантовой теорией и полуклассической теорией

	Полевые уравнения	Материальные уравнения
Полуклассическая теория	$\square^2 E - (\nu/2Q) E' =$ $= \underbrace{-(\nu^2/2\epsilon_0) [N \cdot \mathcal{F}(\rho_{ab} + \rho_{ba})]}_{\text{усиление}}$ <p style="text-align: center; margin-left: 100px;">потери</p>	$\dot{\rho} = -i [V(t), \rho(t)]$
Квантовая теория	$\rho_{nn'} = -i \underbrace{\sum_{\alpha_i} \sum_i [V_{\alpha}^i, \rho^i]_{a_i, n, a_i, n'}}_{\text{усиление}} -$ $- i \underbrace{\sum_{\nu_j} \sum_j [V_{\nu}^j, \rho^j]_{\nu_j, n, \nu_j, n'}}_{\text{потери}}$	$\dot{\rho}_{\text{атом поле}}^i = -i [V(t), \rho_{\text{атом поле}}^i(t)]$

для матрицы плотности излучения, которое зависит от параметров всей системы и не содержит информации о состоянии отдельных атомов.

Теперь мы имеем полностью квантовый вариант теории. Его сопоставление с полуклассическим рассмотрением проведено в табл. 1. Формализм, развитый здесь при описании полностью квантового варианта теории лазера, оказывается полезным и для других задач о связанных системах¹⁾. Этот метод был изложен в 1965 г. на конференции по квантовой электронике. При другом подходе мы постараемся свести математический аппарат к минимуму и детально остановиться на физике проблемы.

3.2. *Метод II*²⁾. Как подчеркивалось ранее, каждый атом в газовом лазере передает свою энергию полю независимо, если не считать того, что другие атомы создают электромагнитное поле, с которым он взаимодействует. Имея это в виду, рассмотрим изменение матрицы плотности поля излучения после инжекции в момент времени t_0 одного атома накачки, находящегося в верхнем из двух атомных состояний $|a\rangle$ и $|b\rangle$. В n -представлении это изменение имеет вид

$$\delta\rho_{n,n'} = \rho_{n,n'}(t_0 + T) - \rho_{n,n'}(t_0), \quad (3.10)$$

где время T велико по сравнению с временем жизни атома, но мало по сравнению с характерным временем роста или затухания лазерного излучения. Макроскопическое изменение матрицы плотности $\Delta\rho_{n,n'}$ за счет многих атомов, действующих на поле за время Δt , имеет вид (фиг. 7).

$$\Delta\rho_{n,n'} = N \delta\rho_{n,n'} = r_a \Delta t \delta\rho_{n,n'}, \quad (3.11)$$

где через r_a обозначена скорость инжекции атомов.

Определим теперь $\delta\rho_{n,n'}$ в уравнении (3.10). Чтобы получить $\rho_{n,n'}(t_0 + T)$, нужно проследить за развитием во времени совместной системы из атома и лазерного

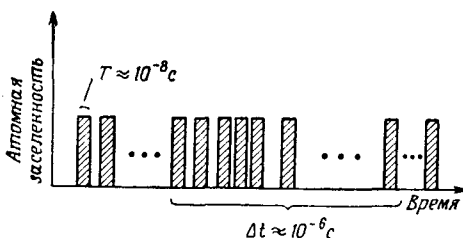
¹⁾ Например, при электрон-плазменных исследованиях, о которых сообщил в этой школе Шиклас (*E. Sziklas*, будет опубликовано).

²⁾ Этот метод обсуждается в работах [2, 3].

поля вплоть до момента времени $t_0 + T$ и затем взять след от матрицы плотности этой системы по атомным состояниям

$$\rho_{n, n'}(t_0 + T) = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha, n; \alpha, n'}(t_0 + T) \quad (\alpha = a, b). \quad (3.12)$$

Для удобства проведем рассмотрение в операторной форме, т. е. будем вплоть до уравнения (3.30) рассматривать величину $\delta\rho(a^\dagger, a)$ вместо $\delta\rho_{n, n'}$. Очевидно, что,



Фиг. 7. Диаграмма, демонстрирующая соотношение между макроскопическими атомными временами T и временным масштабом Δt , характеризующим изменение поля.

как только вопрос будет изучен в каком-либо заданном представлении ($|n\rangle, |\alpha\rangle$ и т. д.), можно перейти к любому другому представлению.

При вычислении $\rho(t_0 + T; a^\dagger, a)$ мы, как и ранее, ограничимся простейшим случаем резонансных атомов ($\omega = \nu$), взаимодействующих с одной полевой модой. Из (2.26) при этом следует, что

$$V(t) = g[\sigma^+ a + \sigma a^\dagger] = g \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Во втором порядке теории возмущений совместная матрица плотности атома и поля имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_{\text{атом}}^{(2)}(t_0 + T) &= \rho_{\text{атом}}(t_0) \rho_{\text{поле}}(t_0) + \\ &+ (-i) \int_{t_0}^{t_0+T} dt' [V(t'), \rho_{\text{атом}}(t_0) \rho_{\text{поле}}(t_0)] + \\ &+ (-i)^2 \int_{t_0}^{t_0+T} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' [V(t'), [V(t''), \rho_{\text{атом}}(t_0) \rho_{\text{поле}}(t_0)]]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

После подстановки V из (3.13) и $\rho_{\text{атом}}(t_0)$ в виде

$$\rho_{\text{атом}}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

уравнение (3.14) записывается как

$$\begin{aligned} \rho_{\text{атом}}^{(2)}(t_0 + T) = & \rho_{\text{поле}}^{(2)}(t_0 + T) = \\ & = \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-i)g \left[\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \right. \\ & \left. - \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix} \right] \int_{t_0}^{t_0+T} dt' + \\ & + (-ig)^2 \left[\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \right. \\ & \left. + \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix} \right] \times \\ & \times \int_{t_0}^{t_0+T} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'', \quad (3.16) \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$\rho_0 \equiv \rho_{\text{поле}}(t_0; a^\dagger, a). \quad (3.17)$$

Проведя в (3.16) простое перемножение матриц, получим

$$\begin{aligned} \rho_{\text{атом}}^{(2)}(t_0 + T) = & \rho_{\text{поле}}^{(2)}(t_0 + T) = \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - igT \begin{pmatrix} 0 & -\rho_0 a \\ a^\dagger \rho_0 & 0 \end{pmatrix} + \\ & + \frac{1}{2} (-igT)^2 \begin{pmatrix} aa^\dagger \rho_0 + \rho_0 aa^\dagger & 0 \\ 0 & -2a^\dagger \rho_0 a \end{pmatrix}. \quad (3.18) \end{aligned}$$

Перепишем еще это выражение в явной компонентной форме

$$\begin{aligned} \rho_{\text{атом}}^{(2)}(t_0 + T) = & \rho_{\text{поле}}^{(2)}(t_0 + T) = \begin{pmatrix} \rho_{aa}(t_0 + T; a^\dagger, a) & \rho_{ab}(t_0 + T; a^\dagger, a) \\ \rho_{ba}(t_0 + T; a^\dagger, a) & \rho_{bb}(t_0 + T; a^\dagger, a) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} \rho_0 - \frac{1}{2} g^2 T^2 (aa^\dagger \rho_0 + \rho_0 aa^\dagger) & igT \rho_0 a \\ -igT a^\dagger \rho_0 & g^2 T^2 a^\dagger \rho_0 a \end{pmatrix}. \quad (3.19) \end{aligned}$$

Вернемся теперь к уравнению (3.10), описывающему изменение поля после инъекции одного атома. В операторной форме

$$\delta\rho(a^\dagger, a) = \rho_{a, a}(t_0 + T; a^\dagger, a) + \rho_{b, b}(t_0 + T; a^\dagger, a) - \rho(t_0; a^\dagger, a). \quad (3.20)$$

После подстановки ρ_{aa} и ρ_{bb} из (3.19) находим

$$\delta\rho(a^\dagger, a) = \rho(t_0; a^\dagger, a) - \frac{1}{2} g^2 T^2 [aa^\dagger \rho(t_0; a^\dagger, a) + \rho(t_0; a^\dagger, a) aa^\dagger] + g^2 T^2 a^\dagger \rho(t_0; a^\dagger, a) a - \rho(t_0; a^\dagger, a). \quad (3.21)$$

Таким образом, во втором порядке теории возмущений изменение матрицы плотности лазерного поля после инъекции одного атома имеет вид

$$\delta\rho = -\frac{1}{2} g^2 T^2 (aa^\dagger \rho(t_0) + \rho(t_0) aa^\dagger) + g^2 T^2 a^\dagger \rho(t_0) a. \quad (3.22)$$

Отметим, что влияние одного атома на массивный осциллятор лазерного поля очень незначительно, заметным будет только результат действия многих атомов на поле, так что можно в хорошем приближении считать

$$\rho(t_0) \approx \rho(t) \quad (3.22a)$$

за время жизни любого отдельного атома. Уравнение (3.22) можно записать в виде

$$\delta\rho^{(2)} = -\frac{1}{2} g^2 T^2 (aa^\dagger \rho(t) + \rho(t) aa^\dagger) + g^2 T^2 a^\dagger \rho(t) a. \quad (3.23)$$

Зная изменение матрицы плотности $\delta\rho$ после инъекции одного атома, из уравнения (3.11) (см. также фиг. 8) можно найти макроскопическое изменение матрицы плотности $\delta\rho$ после инъекции N атомов, взаимодействующих с полем в течение времени $\Delta t \gg T$:

$$\Delta\rho = r_a \Delta t \left[-\frac{1}{2} g^2 T^2 (aa^\dagger \rho(t) + \rho(t) aa^\dagger) + g^2 T^2 (a^\dagger \rho(t) a) \right]. \quad (3.24)$$

Следовательно, крупномасштабная временная производная $\Delta\rho/\Delta t = r_a\delta\rho$ матрицы плотности лазерного излучения принимает вид

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\text{усиление}} = -\frac{1}{2} A (aa^\dagger\rho + \rho aa^\dagger) + Aa^\dagger\rho a, \quad (3.25)$$

где через A обозначен коэффициент линейного усиления

$$A = r_a g^2 T^2. \quad (3.26)$$

В полуклассической теории потери вводились посредством фиктивных омических токов. В данной теории для моделирования механизма потерь мы просто пропускаем находящиеся в нижнем из двух возможных состояний атомы через резонатор. Для таких атомов, как и при рассмотрении в рамках метода I ,

$\rho_{\text{атом поле}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho_{\text{поле}} \end{pmatrix}$. В результате находим

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\text{потери}} = -\frac{1}{2} C (a^\dagger a \rho + \rho a^\dagger a) + C (a \rho a^\dagger), \quad (3.27)$$

где через

$$C = \frac{\nu}{Q} \quad (3.28)$$

обозначен коэффициент потерь в резонаторе.

Итак, полное уравнение движения для оператора плотности излучения с учетом усиления и потерь принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = & \frac{1}{2} A (aa^\dagger\rho + \rho aa^\dagger) + \\ & + Aa^\dagger\rho a - \frac{1}{2} C (a^\dagger a \rho + \rho a^\dagger a) + C a \rho a^\dagger. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Уравнение (3.29) есть не что иное, как операторное выражение для полученного раньше в [17] управляющего уравнения в представлении чисел заполнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{n, n'} = & -\frac{1}{2} A ((n+1) + (n'+1)) \rho_{n, n'}(t) + \\ & + A \sqrt{nn'} \rho_{n-1, n'-1}(t) - \frac{1}{2} C (n+n') \rho_{n, n'}(t) + \\ & + C \sqrt{(n+1)(n'+1)} \rho_{n+1, n'+1}(t). \end{aligned} \quad (3.30a)$$

Переходя в (3.29) к представлению когерентных состояний, получаем уравнение Фоккера — Планка

$$\frac{dP}{dt}(\alpha^*, \alpha, t) = -\frac{A-C}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha P) + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} (\alpha^* P) \right] + A \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha \partial \alpha^*}, \quad (3.30б)$$

где $P(\alpha, \alpha^*)$ определяется соотношением

$$\rho = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha.$$

Уравнения, подобные (3.30а) и (3.30б), изучались рядом авторов [20—28]¹⁾.

Уравнение (3.30а) описывает усиление слабого сигнала в лазерном усилителе, но непригодно для описания генерации лазера. Чтобы получить условия стационарной генерации, нужно, как и в полуклассической теории, рассмотреть атом в более высоком порядке по теории возмущений. Иначе говоря, мы должны вычислить $\delta\rho$ в следующем (четвертом) порядке теории возмущений

$$\delta\rho_{n,n'} = \delta\rho_{n,n'}^{(2)} + \delta\rho_{n,n'}^{(4)}.$$

Проделав эти вычисления, мы получим новое уравнение движения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{n,n'} = & - [R_{n,n'}(n+1) + R_{n',n}(n'+1)] \rho_{n,n'}(t) + \\ & + [R_{n-1,n'-1} + R_{n'-1,n-1}] \sqrt{nn'} \rho_{n-1,n'-1}(t) - \\ & - \frac{1}{2} C(n+n') \rho_{n,n'} + C \sqrt{(n+1)(n'+1)} \rho_{n+1,n'+1}, \quad (3.31) \end{aligned}$$

где коэффициенты $R_{n,n'}$ определяются выражением²⁾

$$R_{n,n'} = r_a g^2 T^2 \left(\frac{1}{2} - g^2 \frac{T^2}{4} [3(n'+1) + (n+1)] \right). \quad (3.32а)$$

Уравнение (3.31) есть уравнение движения лазерного поля, взаимодействующего с нелинейной атомной средой и линейным механизмом потерь. Проведя вычисления в более общем случае для «атомов с расстройкой» ($\omega \neq \nu$) и различными скоростями распада γ_a и γ_b с

¹⁾ См. также лекции Хакена и Вайдлиха в настоящем сборнике. — *Прим. ред.*

²⁾ Это выражение соответствует результату работы [1], если положить $\gamma_a = \gamma_b = 1/T$ и $\omega = \nu$.

уровней a и b (в рассмотренной здесь модели атомы проходят через резонатор за время T и скорости распада обоих уровней одинаковы), мы снова получаем уравнение (3.31), но коэффициенты $R_{n, n'}$ принимают теперь вид¹⁾

$$R_{n, n'} = r_a g^2 \frac{\gamma_b (\gamma_{ab} + i\Delta) + g^2 (n - n')}{\gamma_a \gamma_b (\gamma_{ab}^2 + \Delta^2) + 2\gamma_{ab}^2 g^2 (n + 1 + n' + 1) + g^2 (n' - n) [g^2 (n - n') + i\Delta (\gamma_a - \gamma_b)]}, \quad (3.326)$$

где $\Delta = \omega - \nu$.

§ 4. Обсуждение уравнения движения, статистического распределения фотонов и статистики фотоэлектронов

Получив уравнения движения для матрицы плотности лазерного излучения, перейдем теперь к интерпретации и решению этих уравнений. Для последующего анализа наиболее существенным является тот факт, что, как видно из (3.31), уравнения движения связывают между собой лишь члены одинаковой «недиагональности» k матрицы плотности $\rho_{n, n'}$ ($k = n - n'$). Помня об этом и не интересуясь пока недиагональными элементами, рассмотрим уравнения для диагональных элементов $\rho_{n, n}$ матрицы плотности $\rho_{n, n'}$ (кинетические уравнения для фотонов).

	$n-1$	n	$n+1$	$n'-1$	n'	$n'+1$
$\rho \rightarrow$	$n-1$	$\rho_{n-1, n-1}$			$\rho_{n-1, n'-1}$	
	n	$\rho_{n, n-1}$	$\rho_{n, n}$		$\rho_{n, n'}$	
	$n+1$		$\rho_{n+1, n}$	$\rho_{n+1, n+1}$		$\rho_{n+1, n'+1}$
	$n+2$			$\rho_{n+2, n+1}$		

(4.1)

¹⁾ См. выражение (79) в работе [3].

4.1. Уравнения для диагональных элементов матрицы плотности и статистика фотонов. Уравнения для диагональных элементов матрицы плотности получаются после подстановки в (3.31) коэффициентов $R_{n,n}$ из (3.32a) ¹⁾

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{n,n}(t) = & \\ = & \underbrace{-A \left[1 - \frac{B}{A}(n+1) \right] (n+1) \rho_{n,n} + A \left[1 - \frac{B}{A}n \right] n \rho_{n-1,n-1}}_{\text{накачка}} - \underbrace{C n \rho_{n,n} + C(n+1) \rho_{n+1,n+1}}_{\text{затухание}}, \end{aligned} \quad (4.1a)$$

где введены обозначения:

$A = r_a g^2 T^2$ — линейное усиление,

$B = \frac{1}{3} r_a g^4 T^4$ — параметр насыщения, (4.2)

$C = \frac{\nu}{Q}$ — коэффициент потерь.

В уравнении (4.1) члены сгруппированы таким образом, чтобы сделать физическую интерпретацию очевидной. Рассмотрим кинетическое уравнение для фотонов в трех характерных областях:

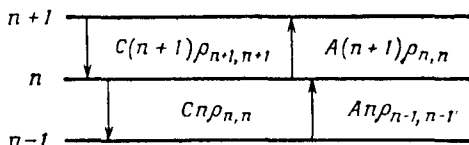
1) область линейной теории, которая накладывает ограничения на усиление при $A > \nu/Q$ и хорошо описывает лазер в допороговом режиме при $A < \nu/Q$;

2) область нелинейной теории, применимой на пороге и выше порога генерации, но несправедливой при большой интенсивности излучения, поскольку при выводе использовалась теория возмущений;

3) область точного решения, которая применима и при очень больших (по сравнению с характерными для газовых лазеров) интенсивностях излучения.

¹⁾ Уравнение (4.1) учитывает взаимодействие атома с полем во всех порядках квадрата константы связи. Однако в обычной области генерации газового лазера входящая в уравнение (4.1) величина $[1 + (B/A)n]^{-1}$ может быть в хорошем приближении аппроксимирована выражением $[1 - (B/A)n]$. Это соответствует полученному нами результату при вычислении $\delta\rho$ с точностью до четвертого порядка константы связи g .

Линейная теория. Уравнения, описывающие поток вероятности между n -м и $(n \pm 1)$ -м уровнями полевого осциллятора, изображены на фиг. 8. Как видно из фиг. 8 и в соответствии с принципом детального равновесия, для находящегося в термическом равновесии со своими резервуарами лазера в допороговом режиме



Фиг. 8. Поток вероятности, обусловленный линейным усилением и потерями резонатора.

уравнение (4.1) эквивалентно следующим двум идентичным системам уравнений:

$$An\rho_{n-1, n-1} - Cn\rho_{n, n} = 0, \quad (4.3a)$$

$$-A(n+1)\rho_{n, n} + C(n+1)\rho_{n+1, n+1} = 0. \quad (4.3б)$$

Легко видеть, что решение уравнений (4.3a) и (4.3б) имеет вид

$$\rho_{n, n} = \left\{ \sum_n \left(\frac{A}{C} \right)^n \right\}^{-1} \left(\frac{A}{C} \right)^n = \left(1 - \frac{A}{C} \right) \left(\frac{A}{C} \right)^n, \quad (4.4)$$

где первый множитель в правой части является нормировочным. После введения эффективной температуры θ , определяемой соотношением

$$\frac{A}{C} = \exp \left[- \frac{\hbar\nu}{k_B\theta} \right], \quad (4.5)$$

выражение (4.4) принимает обычный вид (2.32) функции распределения теплового излучения в одну моду

$$\rho_{n, n} = \left(1 - \exp \left[- \frac{\hbar\nu}{k_B\theta} \right] \right) \exp \left[- \frac{\hbar\nu n}{k_B\theta} \right]. \quad (4.6)$$

Среднее значение для этого распределения

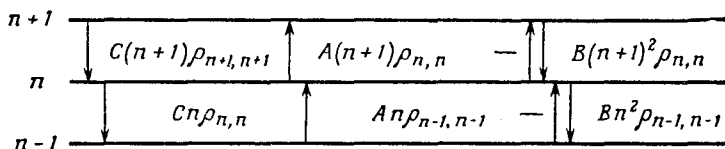
$$\langle n \rangle = \sum_n n \exp \left[- \frac{\hbar\nu n}{k_B\theta} \right] \left(1 - \exp \left[- \frac{\hbar\nu}{k_B\theta} \right] \right) \quad (4.7)$$

является функцией Бозе — Эйнштейна

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\exp[\hbar\nu/k_B\theta] - 1}. \quad (4.8)$$

Уравнение (4.6) является основным результатом квантовой теории монохроматической неоновой лазерной вывески (лазер в допороговом режиме).

Нелинейная теория. Для адекватного описания лазера в режиме выше порога генерации необходимо



Фиг. 9. Поток вероятности, обусловленный нелинейным усилением и потерями резонатора.

учесть эффекты атомных нелинейностей. Как упоминалось ранее, эти нелинейности возникают, когда атом переходит в нижнее состояние и начинает поглощать энергию поля. В § 3 отмечалось, что такое «насыщение» усиления из-за многократного взаимодействия атома с полем приводит к замене коэффициента линейного усиления A выражением $A - B(n+1)$ (или $A - Bn$). Фиг. 8 нужно теперь заменить на фиг. 9, где отображены эти многократные взаимодействия атома с полем.

С учетом нелинейных членов уравнения (4.3а) и (4.3б) принимают вид

$$(A - Bn)n\rho_{n-1, n-1} - Cn\rho_{n, n} = 0, \quad (4.9а)$$

$$-(A - B(n+1))(n+1)\rho_{n, n} + C(n+1)\rho_{n+1, n+1} = 0. \quad (4.9б)$$

Эти уравнения имеют решение

$$\rho_{n, n} = Z^{-1} \prod_{k=0}^n \frac{A - Bk}{C}, \quad (4.10)$$

где

$$Z = \sum_n \prod_{k=0}^n \frac{A - Bk}{C}. \quad (4.11)$$

Величина $\rho_{n,n}$ является произведением $n+1$ сомножителей вида $(A/C)[1 - (B/A)k]$. При $k < (A - C)/B = n_p$ каждый из этих сомножителей больше единицы, тогда как при $k > n_p$ множитель $(A/C)[1 - (B/A)k]$ меньше единицы. Следовательно, с увеличением n вплоть до n_p значение $\rho_{n,n}$ возрастает и затем монотонно убывает к нулю для $n > n_p$. Таким образом, при $n = n_p$ распределение имеет максимум. Среднее число фотонов, соответствующее распределению (4.10), в очень хорошем приближении определяется выражением

$$\langle n \rangle = \frac{A - C}{B} = \frac{\text{усиление} - \text{потери}}{\text{параметр насыщения}} \rightarrow E_{\text{полуклассич}}^2,$$

что согласуется с полуклассическим результатом (1.40). Фактически, как мы увидим далее, в пределе бесконечно большого усиления излучение лазера становится строго когерентным, что вытекает из принципа соответствия¹⁾.

Следует отметить, что для $n > A/B$ распределение (4.10) может быть отрицательным. Это обусловлено тем, что при вычислении $\delta\rho_{n,n}$ мы ограничились четвертым порядком теории возмущений. Однако величина $\rho_{n,n}$ становится отрицательной при столь больших квантовых числах, что для многих лазеров этим можно пренебречь. При «точном» решении задачи диагональные элементы матрицы плотности всегда остаются положительно определенными. Мы провели рассмотрение вплоть до третьего порядка теории возмущений для поляризации (четвертого порядка для $\delta\rho$), поскольку это имело физический смысл. Найдем теперь для $\rho_{n,n}$ точное решение, т. е. получим матрицу плотности, проведя вычисления с учетом всех порядков по константе связи g .

¹⁾ Это верно лишь в принятой здесь модели, когда атомы возбуждаются на один только верхний уровень. В более общем случае предел при больших энергиях излучения зависит от соотношения заселенностей рабочих уровней, так что излучение не будет строго когерентным. — *Прим. ред.*

Точная теория. Когда решение для $\delta\rho$ записано «точно», получаем выражение

$$\begin{aligned} \delta\rho_{n,n} = & -A(n+1) \left[1 + (n+1) \frac{B}{A}\right]^{-1} \rho_{n,n} + \\ & + An \left[1 + n \frac{B}{A}\right]^{-1} \rho_{n-1,n-1} - Cn\rho_{n,n} + \\ & + C(n+1)\rho_{n+1,n+1}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

которое переходит, как видно, в уравнение (4.1), если выражения в квадратных скобках разложить по степеням A/B . Решение уравнения (4.12) запишется следующим образом:

$$\rho_{n,n} = \mathcal{N} \prod_{k=0}^n \frac{A}{C} \left(1 + \frac{B}{A} k\right)^{-1}, \quad (4.13)$$

где \mathcal{N} — константа нормировки. Мы можем привести это распределение к более удобному виду, переписав выражение (4.13) в форме

$$\rho_{n,n} = \mathcal{N} \left(\frac{A^2}{CB}\right)^n \prod_{k=0}^n \frac{1}{A/B + k}$$

и используя определение обобщенной факториальной функции

$$\prod_{k=0}^n \left(\frac{A}{B} + k\right) = \frac{(n + A/B)!}{(A/B - 1)!}.$$

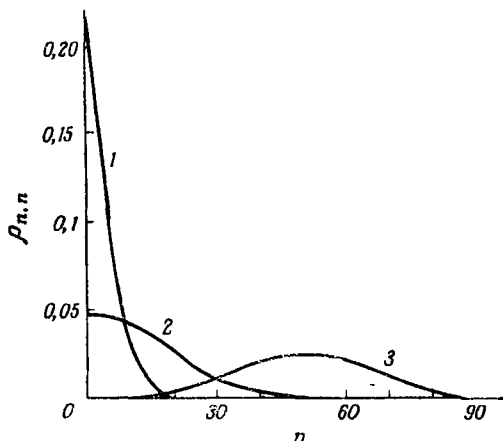
В результате получаем следующее выражение:

$$\rho_{n,n} = \frac{Z^{-1} (A^2/BC)^{[n+(A/B)]}}{[n + (A/B)]!}, \quad (4.14)$$

где константу нормировки Z^{-1} можно выразить через вырожденную гипергеометрическую функцию

$$\begin{aligned} Z = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (A^2/BC)^{[n+(A/B)]}}{[n + (A/B)]!} &= \left[\frac{(A^2/BC)^{A/B}}{(A/B)!} \right] \times \\ &\times \left[{}_1F_1 \left(1; \frac{A}{B} + 1; \frac{A^2}{BC} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Вид распределения (4.14) при различных значениях возбуждения изображен на фиг. 10. На фиг. 11 это распределение сравнивается с распределением для когерентного состояния.



Фиг. 10. График лазерной функции распределения, иллюстрирующий три характерные области генерации.

1—20% ниже порога; 2—порог; 3—20% выше порога. Используя соотношение (4.17), нелинейный параметр B можно выбрать таким образом, чтобы получить значение $\langle n \rangle = 50$ при 20%-ном превышении порогового значения.

Вычисляя среднее значение n , находим

$$\begin{aligned}
 \langle n \rangle &= Z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(A^2/BC)^{n+(A/B)}}{[n+(A/B)]!} = \\
 &= Z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{A}{B} - \frac{A}{B} \right) \frac{(A^2/BC)^{n+(A/B)}}{[n+(A/B)]!} = \\
 &= Z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(A^2/BC)^{n+(A/B)-1}}{[n+(A/B)-1]!} \right] \frac{A^2}{BC} - \frac{A}{B} (1 - \rho_{0,0}) = \\
 &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \rho_{n,n} \right] \frac{A^2}{BC} - \frac{A}{B} (1 - \rho_{0,0}) = \frac{A}{C} \frac{A-C}{B} + \frac{A}{B} \rho_{0,0}. \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

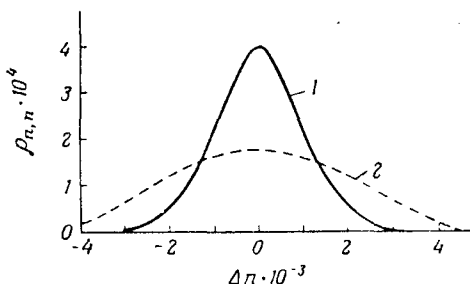
Для лазера в режиме значительно выше порога генерации член $(A/B)\rho_{0,0}$ в (4.16), очевидно, несуществен, поскольку $(A - C)/C \gg \rho_{0,0}$, и тогда

$$\langle n \rangle = \frac{A}{C} \frac{A - C}{B}. \quad (4.17)$$

Для дисперсии функции распределения в таком же приближении получаем

$$\sigma^2 = \frac{A}{A - C} \langle n \rangle. \quad (4.18)$$

Отметим в заключение, что в случае, когда усиление



Фиг. 11. Сравнение статистики фотонов когерентного и лазерного излучений.

Лазер находится в состоянии с 20%-ным превышением порогового значения, параметр B выбран так, чтобы величина $\langle n \rangle$ равнялась 10^6 .
1 — когерентное излучение; 2 — лазерное излучение.

гораздо больше потерь, выражение (4.17) принимает вид

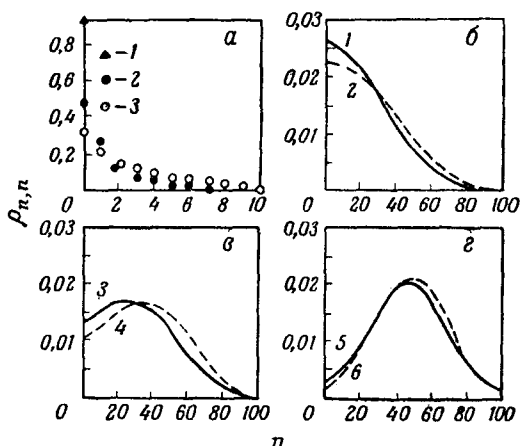
$$\langle n \rangle = \frac{A}{BC} (A - C) \xrightarrow{A \gg C} \frac{A^2}{BC} \equiv N. \quad (4.19)$$

Для $A \gg C$ наиболее существенные n в (4.14) лежат в области значений $n = N \pm 0(\sqrt{N})$, которая много больше A/B . Следовательно, в этом случае можно записать

$$\rho_{n,n} = Z^{-1} \frac{(N)^{n+A/B}}{(n + A/B)!} \xrightarrow{A \gg C} \exp[-N] \frac{N^n}{n!}. \quad (4.20)$$

Это классический (пуассоновский) предел функции распределения¹⁾, соответствующий выражению (2.34).

4.2. Изменение во времени статистического распределения фотонов. Рассмотрим теперь временную эволюцию лазера из вакуумного в стационарное состояние.



Фиг. 12. Временная эволюция лазера из вакуумного состояния. Мы выбрали $\langle n \rangle_{\text{стационар. сост.}} = 50$, $\nu/Q = 0,9 \cdot 10^6$, $A = 1,0 \cdot 10^6$, т. е. на 10% выше порога.
 а) 1 — $t=0$, 2 — $t=1$ мкс, 3 — $t=2$ мкс; б) $t_1=16,6$ мкс, $t_2=18,2$ мкс; в) $t_3=25,4$ мкс, $t_4=27,8$ мкс; г) $t_5=55,4$ мкс, $t_6=63,8$ мкс.

В общем случае временная зависимость $\rho_{n,n}(t)$ может быть представлена в виде

$$\rho_{n,n}(t) = \sum_s \varphi_s(n) \exp[-\mu_s t],$$

где φ_s и μ_s — затухающие собственные функции и собственные значения. Стационарному решению (4.14) соответствует $\mu_0 = 0$; собственные значения и собственные функции высших порядков вычислены и будут опубликованы позднее. Однако, чтобы получить представ-

¹⁾ Предел $A \gg C$ неприменим, например, для типичного гелий-неонового лазера, где $A \leq 1,1C$, т. е. на 10% выше порога генерации.

ление о временной эволюции, кинетические уравнения для фотонов были проинтегрированы численно и результаты демонстрировались на экране вычислительной машины [29]. Были выбраны значение $\langle n \rangle_{\text{стац. сост}} = 50$ и такое значение $A - C$, которое соответствует 30%-ному превышению порога. Функция распределения из вакуумной в момент времени $t = 0$ превращается в функцию распределения стационарного состояния за время $t \approx 30$ мкс подобно тому, как показано на фиг. 12. Недавно группе под руководством Ареки¹⁾ удалось получить экспериментальные результаты, которые согласуются с предсказываемой теорией временной эволюцией лазерной статистики.

4.3. *Статистика фотоэлектронных отсчетов.* Поскольку статистика фотонов наблюдаема только с помощью техники счета фотоэлектронов, мы обсудим вкратце свойства функции распределения фотоотсчетов²⁾, получающейся при произвольной заданной функции распределения фотонов $\rho_{n, n}$. Для краткости мы просто приведем соотношение между фотонами и электронами в виде, удобном для понимания физического смысла. Этот вид³⁾ функции распределения фотоотсчетов является подходящей отправной точкой, если, как в нашем случае, мы имеем функцию распределения фотонов $\rho_{n, n}$.

Если световым лучом с фиксированным числом фотонов (в состоянии $|n\rangle$) осветить фотодетектор с квантовым выходом η , то вероятность наблюдения m фотоэлектронов оказывается равной

$$P_m(|n\rangle) = \binom{n}{m} \eta^m (1 - \eta)^{n-m}. \quad (4.21)$$

¹⁾ См. лекцию Ареки (в этом сборнике).

²⁾ Сообщено на Второй Рочестерской конференции по квантовой теории оптической когерентности (июнь 1966 г.). В настоящее время нами готовится более подробное изложение этого вопроса. (Опубликовано: Phys. Rev., 179, 368 (1969). — Прим. ред.)

³⁾ Например, вместо выражения (4.24). См. также лекции Глаубера (перевод в сб. «Когерентные состояния в квантовой теории», изд-во «Мир», 1972. — Прим. ред.). Для классических полей выражение (4.24) впервые предложил Мандель [30]. На квантово-механические поля его распространили Келли и Клейнер [31].

Выражение (4.21) имеет простой физический смысл, так как представляет собой распределение Бернулли для m удачных событий (отсчетов) и $n - m$ неудачных, причем каждое удачное событие имеет вероятность η . Если, с другой стороны, мы имеем поле в смешанном состоянии, причем вероятность обнаружения n фотонов равна $\rho_{n, n}$, то, очевидно,

$$P_m = \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} \eta^m (1 - \eta)^{n-m} \rho_{n, n}. \quad (4.22)$$

Чтобы привести (4.22) к другому виду, запишем матрицу плотности ρ в $P(\alpha)$ -представлении

$$\rho_{n, n} = \int \frac{(\alpha^* \alpha)^n}{n!} d^2 \alpha P(\alpha) \exp[-|\alpha|^2]. \quad (4.23)$$

Тогда (4.22) принимает вид

$$\begin{aligned} P_m &= \sum_{n=m} \int \frac{n!}{m! (n-m)!} \exp[-|\alpha|^2] \times \\ &\quad \times \frac{(\alpha^* \alpha)^n}{n!} \eta^m (1 - \eta)^{n-m} P(\alpha) d^2 \alpha = \\ &= \int \exp[-|\alpha|^2] \frac{\eta^m}{m!} P(\alpha) \sum_{l=0} \frac{1}{l!} (\alpha^* \alpha)^{l+m} (1 - \eta)^l d^2 \alpha = \\ &= \int d^2 \alpha P(\alpha) \frac{(\eta \alpha^* \alpha)^m}{m!} \exp[-\eta \alpha^* \alpha]. \quad (4.24) \end{aligned}$$

Выражение (4.24) записано в форме, встречающейся в литературе наиболее часто.

Мы можем теперь вычислить распределение фотоотсчетов для полностью квантованного лазера, подставляя выражение (4.14) для $\rho_{n, n}$ в (4.22). Вероятность обнаружения m фотоэлектронов оказывается равной

$$P_m = \sum_n \binom{n}{m} \eta^m (1 - \eta)^{n-m} \left\{ Z^{-1} \frac{(A^2/BC)^{n+A/B}}{(n+A/B)!} \right\}. \quad (4.25)$$

Суммируя ряд, приходим к основному соотношению

$$\begin{aligned} P_m &= Z^{-1} \eta^m \frac{(A^2/BC)^{m+A/B}}{(m+A/B)!} \times \\ &\quad \times {}_1F_1\left(m+1, m + \frac{A}{B} + 1, (1 - \eta) \frac{A^2}{BC}\right), \quad (4.26) \end{aligned}$$

где ${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция. По-видимому, имеет смысл подчеркнуть, что статистика фотоэлектронов (4.26) не получается из статистики фотонов (4.14) простым масштабным преобразованием. Процесс детектирования изменил статистическое распределение:

$$\underbrace{\rho_{nn}}_{\text{фотон}} \xrightarrow{\text{детектирование}} \rightarrow \underbrace{\rho_{n,n} \left\{ \eta^n {}_1F_1 \left(n+1, n + \frac{A}{B} + 1, (1-\eta) \frac{A^2}{BC} \right) \right\}}_{\text{фотоэлектрон}}.$$

Статистика фотоотчетов от лазерного излучения исследовалась несколькими авторами [32—34], и результаты хорошо согласуются с теорией.

§ 5. Недиagonальные элементы матрицы плотности и спектральный профиль

Рассмотрев диагональные элементы матрицы плотности поля излучения, перейдем теперь к исследованию недиагональных элементов $\rho_{n,n'}(t)$, $n \neq n'$. Получив выражения для временной зависимости недиагональных элементов, мы покажем, как эта информация позволяет определить ширину линии лазерного излучения [35]. Соответствующий $\rho_{n,n+1}(t)$ спектральный профиль будет получен тремя разными способами:

- 1) по затуханию усредненного по ансамблю электрического поля;
- 2) из рассмотрения теории простого спектрального анализатора;
- 3) с помощью корреляционной функции $G^{(1)}(t)$.

5.1. *Временная зависимость $\rho_{n,n+k}(t)$* . Начнем с того, что перепишем уравнения движения для недиагональных элементов в форме, которая в наибольшей степени подчеркивала бы их связь с диагональными элементами. Введем обозначение

$$\rho_{n,n'}(t) = \rho_{n,n+k}(t) \equiv \Phi_n(k, t),$$

где k означает степень недиагональности. Записанные через $\Phi_n(k, t)$ наши уравнения движения (3.31) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_n(k, t) = & -\frac{1}{8} k^2 B \Phi_n(k, t) - \\ & - \left[A - B \left(n + 1 + \frac{1}{2} k \right) \right] \left(n + 1 + \frac{1}{2} k \right) \Phi_n(k, t) + \\ & + \left[A - B \left(n + \frac{1}{2} k \right) \right] (n(n+k))^{1/2} \Phi_{n-1}(k, t) - \\ & - C \left(n + \frac{1}{2} k \right) \Phi_n(k, t) + \\ & + C [(n+1)(n+1+k)]^{1/2} \Phi_{n+1}(k, t). \quad (5.1) \end{aligned}$$

Второе и третье слагаемые в (5.1) описывают усиление поля излучения, тогда как два последних представляют потери. В общем случае решение уравнения (5.1) можно записать следующим образом:

$$\Phi_n(k, t) = \sum_s \varphi_s(n, k) \exp[-\mu_s^{(k)} t], \quad (5.2)$$

где $\mu_s^{(k)}$ — затухающие собственные значения и $\varphi_s(n, k)$ — соответствующие собственные векторы. В случае $k=0$ (диагональные элементы) получаем самое медленное затухание; собственное значение $\mu_0(0) = 0$ соответствует стационарному состоянию. Но для недиагональных элементов все собственные значения положительно определены, т. е. $\mu_s^{(k)} > 0$. Поэтому единственным стационарным решением будет

$$\rho_{n, n'}(t) = \Phi_n(k, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad n \neq n'.$$

Если лазер находится в состоянии, достаточно далеко от порога генерации, то наименьшее собственное значение $\mu_0^{(k)}$ мало и решение будет сходно с решением (4.10) диагонального уравнения. Поэтому мы будем искать решение в следующей форме:

$$\Phi_n(k, t) = \mathcal{N}^k \left[\prod_{l=0}^n \frac{A - Bl}{C} \prod_{m=0}^{n+k} \frac{A - Bm}{C} \right]^{1/2} \exp[-\mu_0^{(k)} t], \quad (5.3)$$

где \mathcal{L}_k определяются начальной величиной $\Phi_n(k, 0)$. Можно показать¹⁾, что уравнение (5.1) удовлетворяется с очень хорошей точностью, если положить

$$\mu_0^{(k)} = \frac{1}{2} k^2 D, \quad \text{где} \quad D = \frac{v/Q}{2\langle n \rangle}. \quad (5.4)$$

Тогда видно, что недиагональные элементы лазера выше порога генерации зависят от времени следующим образом:

$$\rho_{n, n+k}(t) \equiv \Phi_n(k, t) = \Phi_n(k, 0) \exp[-\mu^{(k)} t_0],$$

а в шредингеровском представлении зависимость принимает вид

$$[\Phi_n(k, t)]_{\text{ш}} = \Phi_n(k, 0) \exp[-(ikv + \mu_0^{(k)}) t]. \quad (5.4a)$$

5.2. *Затухание электрического поля.* Вспоминая выражение (2.9), мы видим, что электрическое поле в лазере должно быть пропорционально $[\Phi_n(1, t)]_{\text{ш}}$

$$\begin{aligned} \langle E(t) \rangle &= \mathcal{E} \sum_n \{ [\Phi_n(1, t)]_{\text{ш}} \sqrt{n+1} + \text{компл. сопр.} \} \sin kz = \\ &= \mathcal{E} \sum_n \{ \Phi_n(1, 0) \sqrt{n+1} \exp[-(iv + \mu_0^{(k)}) t] + \\ &+ \text{компл. сопр.} \} \sin kz = E_0 \cos vt \exp\left[-\frac{Dt}{2}\right]. \quad (5.5) \end{aligned}$$

Очевидно, что затухание является результатом броуновского движения усредненного по ансамблю электрического поля, обусловленного действующими на систему стохастическими процессами. По истечении определенного промежутка времени фаза поля продиффундирует по всему кругу в комплексной плоскости α . Статистически это соответствует утверждению о том, что ожидаемое среднее значение E обратилось в нуль. Характерное время распада электрического поля вследствие диффузии фазы обычно порядка 30 мин.

Для вычисления ширины линии генерации возьмем (в приближении вращающегося поля) фурье-образ

¹⁾ См. приложение III в работе [3].

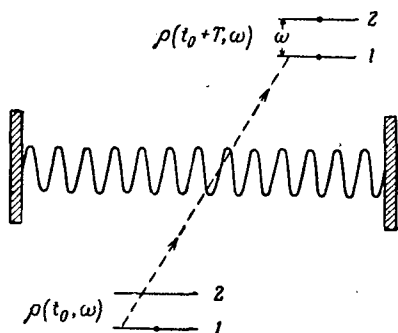
(Ф. Т.) среднего поля E и возведем его в квадрат

$$|F. T. \langle E(t) \rangle|^2 = |E(\omega)|^2 = E_0^2 \left[(\omega - \nu)^2 + \left(\frac{1}{2} D \right)^2 \right]^{-1}. \quad (5.6)$$

Таким образом, форма линии лазерного осциллятора оказывается лоренцевой с полной шириной на полувысоте, равной ¹⁾

$$D = \frac{1}{2} \frac{\nu/Q}{\langle n \rangle}. \quad (5.7)$$

5.3. Теория спектрального анализатора. Выше мы связали затухание среднего поля с шириной линии излучения лазера. Данный раздел будет посвящен вопросу об определении спектра лазерного осциллятора.



Фиг. 13. Схематическая иллюстрация анализатора спектра.

Атомы входят в резонатор лазера в основном состоянии 1, взаимодействуют с лазерным излучением и выходят из резонатора в линейной суперпозиции состояний 1 и 2.

Для ответа на этот вопрос мы используем модель простого спектрального анализатора и изложим теорию такого устройства. Анализатор должен работать в соответствии со следующей «инструкцией».

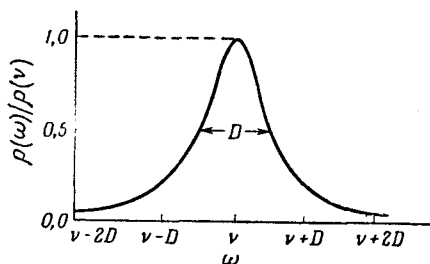
1) Пусть мы имеем ящик с двухуровневыми атомами («спектрометрические атомы») с расстоянием ω между

¹⁾ Эта ширина линии для типичного газового лазера меньше 1 Гц, тогда как атомная ширина линии и ширина линии пассивного резонатора порядка 10^8 и 10^6 Гц соответственно. Выражение для ширины линии согласуется с полученными независимо результатами других авторов [36, 37].

уровнями, причем первоначально все атомы находятся в основном состоянии $|1\rangle$.

2) Начнем медленно двигать один из атомов через лазерный резонатор, где он будет взаимодействовать с полем. Когда атом выйдет из резонатора, его состояние будет представлять собой некоторую суперпозицию основного и возбужденного состояний, как показано на фиг. 13.

3) Проведем измерение, чтобы определить, был ли этот атом возбужден (используя, например, для этой



Фиг. 14. Относительное возбуждение спектрметрических атомов в зависимости от атомной частоты $\omega = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/\hbar$.

цели устройство, которое испускает фотоэлектрон при взаимодействии с возбужденным атомом и не дает сигнала, если атом находится в основном состоянии).

4) Повторяя многократно это измерение, мы найдем вероятность $\sigma_{2,2}$ того, что атом будет возбужден.

5) Повторим первые четыре этапа со спектрметрическими атомами, имеющими другие атомные частоты ω .

6) Начертим теперь график зависимости $\rho_{2,2}(\omega)/\rho_{2,2}(\nu)$ от ω (фиг. 14). Этот график позволяет нам определить спектральный профиль лазерного излучения.

Перейдем теперь к вычислению $\rho_{2,2}(\omega)$. В очень хорошем приближении мы можем считать, что в течение всего времени, когда спектрметрический атом находится в резонаторе, накачка и затухание лазерного поля происходят так же, как если бы спектроскопического атома не было. Другими словами, слабо связанный с «массивным» лазерным полем спектроскопический атом лишь слегка меняет состояние лазерного осциллятора. Таким

образом, мы можем написать, что скорость изменения матрицы плотности для системы спектрометрический атом — лазер является суммой временной производной лазера в отсутствие атома и временной производной, возникающей вследствие взаимодействия спектрометрического атома с полем:

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\text{лазер}} + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\substack{\text{спектр.} \\ \text{взаим}}} \quad (5.8)$$

Из (5.4а) находим, что лазерная временная производная равна

$$\left(\frac{d\rho_{n,n'}}{dt}\right)_{\text{лазер}} = -i\nu(n-n')\rho_{nn'} - \mu_0^{(k)}\rho_{n,n'} \quad (5.9)$$

тогда как временная производная для спектрометрического атома, взаимодействующего с полем посредством дипольного взаимодействия, имеет вид

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\substack{\text{спектр.} \\ \text{взаим}}} r, n; s, n' = -i[H_0^{\text{атом}} + V, \rho]_{r, n; s, n'} \quad (5.10)$$

где r и s равны 1 или 2. Подставляя (5.9) и (5.10) в (5.8), получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{r, n; s, n'} = & -i(n-n')\nu\rho_{r, n; s, n'} - \mu_0^{(k)}\rho_{r, n; s, n'} - \\ & -i(W_r - W_s)\rho_{r, n; s, n'} - i[V, \rho]_{r, n; s, n'} \quad (5.11) \end{aligned}$$

где $W_2 - W_1 = \omega$.

Чтобы получить вероятность возбуждения атома, мы можем решить уравнение (5.11) по теории возмущений. В результате находим

$$\begin{aligned} \rho_{2,2}(\omega) = \sum_n \rho_{2,n;2,n}(\omega) = \\ = \int_0^T dt' \int_0^{t'} dt'' \sum_n |V_{2,n;1,n+1}|^2 \rho_{n+1,n+1}(0) \times \\ \times \exp[-[i(\nu - \omega) + \mu_0^{(l)}](t' - t'')] + \text{компл. сопр.}, \quad (5.12) \end{aligned}$$

где T — время, в течение которого спектрометрический атом находится в резонаторе. После интегрирования выражение (5.12) принимает вид

$$\rho_{2,2}(\omega) = \frac{1}{(\nu - \omega)^2 + (\mu_0^{(1)})^2},$$

что согласуется со спектром (5.7), поскольку $\mu_0^{(1)} = 1/2D$.

5.4. Получение корреляционной функции $G^{(1)}(t)$ из матрицы плотности $\Phi_n(k, t)$. Ширину линии лазерного излучения часто связывают с фурье-образом корреляционной функции

$$G^{(1)}(t) = \text{Sp} (a^\dagger(t) a(0) \rho(0)). \quad (5.13)$$

Покажем, как, зная $\Phi_n(1, t)$, определить $G^{(1)}(t)$. Очевидно, что временная зависимость входящего в (5.13) оператора $a^\dagger(t)$ не соответствует формуле

$$a^\dagger(t) = e^{iH_0 t} a^\dagger(0) \exp[-iH_0 t], \quad (5.14)$$

поскольку лазерное поле не описывается простым гамильтонианом, т. е. лазер представляет собой открытую систему. Иначе говоря, необходимо описать поведение лазерного поля при взаимодействии его с атомными резервуарами согласно уравнению (5.1). Чтобы понять, какой смысл мы должны вкладывать в оператор $a(t)$, будем считать, что эволюция во времени всей системы из возбужденных атомов, диссипативного механизма («Q» резонатора) и лазерного поля описывается временным оператором эволюции $U(t)$. Тогда $a(t)$ будет определяться следующим образом:

$$a(t) = U^\dagger(t) a(0) U(t). \quad (5.15)$$

Подставив $a(t)$ в такой форме, мы теперь должны записать корреляционную функцию (5.13) с учетом «ненаблюдаемых» атомной и диссипативной подсистем, по которым нужно взять след

$$G^{(1)}(t) = \text{Sp}_\rho \text{Sp}_R (U^\dagger(t) a^\dagger(0) U(t) a(0) \rho(0) R(0)). \quad (5.16)$$

Матрица плотности совокупной системы в момент времени $t = 0$ имеет вид $\rho(0)R(0)$, где $R(0)$ означает матрицу по координатам резервуаров. Если ввести определение

$$a^\dagger(t) = \text{Sp}_R (R(0) U^\dagger(t) a^\dagger(0) U(t)), \quad (5.17)$$

то уравнение (5.16) можно записать в форме (5.13). Для (5.13) в $|n\rangle$ -представлении имеем

$$G^{(1)} = \sum_{n, m} \langle n | a^\dagger(t) | m \rangle \langle m | a(0) | m+1 \rangle \rho_{m+1, n}(0). \quad (5.18)$$

Мы получим для временной зависимости операторов $a(t)$ и $a^\dagger(t)$ явное выражение, если вспомнить, что матрица плотности

$$\begin{aligned} \rho_{n, n'}(t) &= [\text{Sp}_R U(t) R(0) \rho(0) U^\dagger(t)]_{n, n'} = \\ &= \text{Sp}_R \sum_{m, m'} [U(t)_{nm} R(0) \rho_{m, m'}(0) U^\dagger(t)_{m', n'}] \end{aligned} \quad (5.19)$$

имеет известную временную зависимость, которая вытекает из (5.4а),

$$\rho_{n, n'}(t) = \rho_{n, n'}(0) \exp - [i\nu(n - n') + \mu_0^{(k)}t]. \quad (5.20)$$

Сравнивая (5.19) и (5.20), мы видим, что матрица $U(t)_{n, m}$ оказывается диагональной

$$U(t)_{n, m} = U_{n, m}(t) \delta_{n, m} \quad (5.21)$$

и

$$\text{Sp}_R [U(t)_{n, n} R(0) U^\dagger(t)_{n-1, n-1}] = \exp [(i\nu - \mu_0^{(1)})t]. \quad (5.22)$$

Используя выражения (5.21) и (5.22), матричные элементы $a^\dagger(t)$ можно записать в форме

$$\begin{aligned} \langle n | a^\dagger(t) | n-1 \rangle &= \text{Sp}_R [U(t)_{n, n} a^\dagger(0)_{n, n-1} U^\dagger(t)_{n-1, n-1} R(0)] = \\ &= a^\dagger(0)_{n, n-1} \text{Sp}_R U^\dagger(t)_{n-1, n-1} R(0) U(t)_{n, n} = \\ &= a^\dagger(0)_{n, n-1} \exp [(i\nu - \mu_0^{(1)})t], \end{aligned} \quad (5.23)$$

так что выражение (5.18) принимает вид¹⁾

$$G^{(1)}(t) = \text{Sp}_\rho [a^\dagger(0) \exp[(iv - \mu_0^{(1)})t] a(0) \rho(0)] = \\ = G^{(1)}(0) \exp[(iv - \mu_0^{(1)})t]. \quad (5.24)$$

Произведя над (5.24) фурье-преобразование, найдем

$$G(\omega) = \frac{G^{(1)}(0)}{(\omega - \nu)^2 + (\mu_0^{(1)})^2}, \quad (5.25)$$

что согласуется с шириной линии, полученной первыми двумя методами²⁾.

ЛИТЕРАТУРА

1. Scully M., Lamb W. E., Jr., Stephen M. J., Proceedings of the International Conference on the Physics of Quantum Electronics, Puerto Rico 1965, eds. P. Kelley, et al., New York, 1966, p. 75.
2. Scully M., Lamb W. E., Jr., Phys. Rev. Lett., 16, 853 (1966).
3. Scully M., Lamb W. E., Jr., Phys. Rev., 159, 208 (1967).
4. Lamb W. E., Jr., Proc. S. I. F., Course XXXI, p. 78.
5. Lamb W. E., Jr., Phys. Rev., 134, A1429 (1964).
6. Lamb W. E. Jr., Quantum Optics and Electronics, eds. C. De Witt, A. Blandin, C. Cohen-Tannoudji, New York, 1964, p. 331 (см. перевод в сб. «Квантовая оптика и квантовая радиофизика», изд-во «Мир», 1966).
7. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е., Методы квантовой теории поля в статистической физике, Физматгиз, 1962.
8. Lamb W. E., Jr., Phys. Rev., 85, 268 (1950).
9. Fiutak J., Can Journ. Phys., 41, 12 (1963).
10. Power E., Zienau S., Phil. Trans. Roy. Soc., 251A, 54 (1959).
11. Louisell W., Radiation and Noise in Quantum Electronics, New York, 1965 (см. перевод: У. Люиселл, Излучение и шумы в квантовой электронике, изд-во «Мир», 1972).
12. Sakurai J., Advanced Quantum Mechanics, Cambridge, 1967.
13. Heitler W., Quantum Theory of Radiation, Oxford, 1954 (см. перевод: В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1967).

¹⁾ Дальнейшее обсуждение того, как, зная $\rho(t)$, получить $G(t, t')$, см. в работах [38, 39], а также в приложении I работы [35].

²⁾ Спектр излучения лазера определяется корреляционной функцией $G^{(1)}(t)$. Если пренебречь амплитудными флуктуациями, то, как здесь было показано, вместо $G^{(1)}(t)$ можно вычислять более простую функцию $\Phi_n(1, t)$. Отметим, что такое приближение нарушается в крыльях спектральной линии, где вклады фазовых и амплитудных флуктуаций одного порядка (см. Дополнение). — Прим. ред.

14. *Glauber R.*, Phys. Rev., **131**, 2766 (1963).
15. *Carruthers P., Nieto M. M.*, Am. Journ. Phys., **33**, 537 (1965).
16. *Mandel L., Wolf E.*, Rev. Mod. Phys., **37**, 231 (1965).
17. *Fano U.*, Rev. Mod. Phys., **29**, 74 (1957).
18. *Ter Haar D.*, Reports on Progress in Physics, 1961, p. 305.
19. *Lax M.*, Phys. Rev., **157**, 213 (1967).
20. *Korenman V.*, Phys. Rev. Lett., **14**, 293 (1965); Physics of Quantum Electronics, p. 748.
21. *Lax M., Louisell W.*, Journ. Quant. Elec., Q. E. **3**, 47 (1967).
22. *Lax M.*, Phys. Rev., **157**, 213 (1967).
23. *Willis C.*, Phys. Rev., **147**, 406 (1966).
24. *Haken H.*, Zs. Phys., **190**, 327 (1966).
25. *Sauermann H.*, Zs. Phys., **189**, 312 (1966).
26. *Risken H., Schmid C., Weidlich W.*, Phys. Lett., **20**, 489 (1966).
27. *Fleck J., Jr.*, Phys. Rev., **149**, 322 (1966).
28. *Gordon J. P.*, Phys. Rev., **161**, 367 (1967).
29. *Scully M., Lamb W. E., Jr., Sargent III M.*, IV International Conference on Quantum Electronics (Phoenix, Ariz., 1966).
30. *Mandel L.*, Fluctuations in Light Beams, Progress in Optics, vol. 2, ed. E. Wolf, Amsterdam, 1963.
31. *Kelley P. L., Kleiner W. H.*, Phys. Rev., **136**, A316 (1964).
32. *Freed G., Haus H.*, Phys. Rev. Lett., **15**, 943 (1965).
33. *Smith A., Armstrong J.*, Phys. Rev. Lett., **19**, 650 (1966).
34. *Arecchi F. T.*, Phys. Lett., **25A**, 59 (1967).
35. *Scully M., Lamb W. E., Jr.*, Phys. Rev., **166**, 246 (1968).
36. *Korenmann V.*, Proceedings International Conference Quantum Electronics, Puerto Rico, 1965, p. 748.
37. *Lax M.*, Proceedings International Conference Quantum Electronics, Puerto Rico, 1965, p. 735.
38. *Lax M.*, Phys. Rev., **129**, 2342 (1963).
39. *Louisell W., Marburger J.*, IEEE Journ. Quant. Electron, **3**, No. 8, 348 (1967).

3. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЛАЗЕРА

Г. Хакен, В. Вайдлих¹⁾

Введение

В Летней школе по лазерам в 1963 г. в Варенне было представлено два типа теорий. Рассматривая лазер как *линейное* устройство, Ф. Гордон вычислил его шумовые характеристики и дал качественное описание лазера как нелинейной системы. Лэмб, Хакен и Заурман, Грасюк и Ораевский пренебрегли лазерным шумом, но рассмотрели лазер как нелинейную систему количественно. Нелинейность оказывает решающее влияние на стабильность лазерных мод, их сосуществование и т. д. Однако эти нелинейные теории предсказывали полное отсутствие лазерной генерации ниже определенного порога и бесконечно узкую линию выше порога. Таким образом, ощущалась необходимость в теории, которая связала бы оба эти аспекта: нелинейность и шум. Поскольку лазерный шум обусловлен прежде всего спонтанным излучением, которое является типичным *квантовомеханическим эффектом*, то эта теория тоже должна быть квантовомеханической. Для достижения этой цели с 1964 г. было развито три в сущности эквивалентных метода, а именно:

а) гейзенберговские операторные уравнения с квантовомеханическими силами Ланжевена,

б) уравнение для матрицы плотности атомов и светового поля,

в) уравнение Фоккера — Планка (обобщенное).

Обсудим теперь эти методы.

а) Метод Ланжевена [2, 3] выявляет существенное различие между действием лазера ниже и выше порога.

¹⁾ H. Haken, W. Weidlich, Institut für Theoretische Physik der Universität Stuttgart. — Stuttgart.

Ниже порога лазерный свет является линейной суперпозицией волновых пакетов, которые обусловлены отдельными актами спонтанного излучения и усиливаются вынужденным излучением. Выше порога лазерная мода представляет собой самоподдерживающийся осциллятор со стабильной s -численной амплитудой и малыми дополнительными амплитудными флуктуациями. Процесс диффузии фазы носит незатухающий характер [2, 3, 5, 8, 9]. Начиная с *некоторой области выше порога* метод квантовомеханической квазилинеаризации позволяет количественно определить фазовые и амплитудные флуктуации и показать наличие резонансов [5]. В пороговой области после адиабатического исключения атомных переменных получается квантовомеханическое уравнение Ван дер Поля [1, 10]. Предсказанное уменьшение флуктуаций интенсивности при увеличении лазерной интенсивности [2] было подтверждено соответствующими экспериментами [49, 50, 53].

б) Уравнения для матрицы плотности [16, 17], так же как и уравнения типа Фоккера — Планка, будь то в представлении чисел заполнения [12—15] или в представлении Глаубера [18, 24], особенно полезны при рассмотрении пороговой области и при описании изменения статистики фотонов ниже и выше порога. Лазерное излучение ниже порога подчиняется статистике Бозе — Эйнштейна, так что дисперсия функции распределения числа фотонов равна

$$\overline{\Delta n^2} = \bar{n} (\bar{n} + 1), \quad (1)$$

тогда как далеко над порогом функция распределения сводится приближенно к распределению Пуассона с дисперсией

$$\overline{\Delta n^2} = \bar{n}. \quad (2)$$

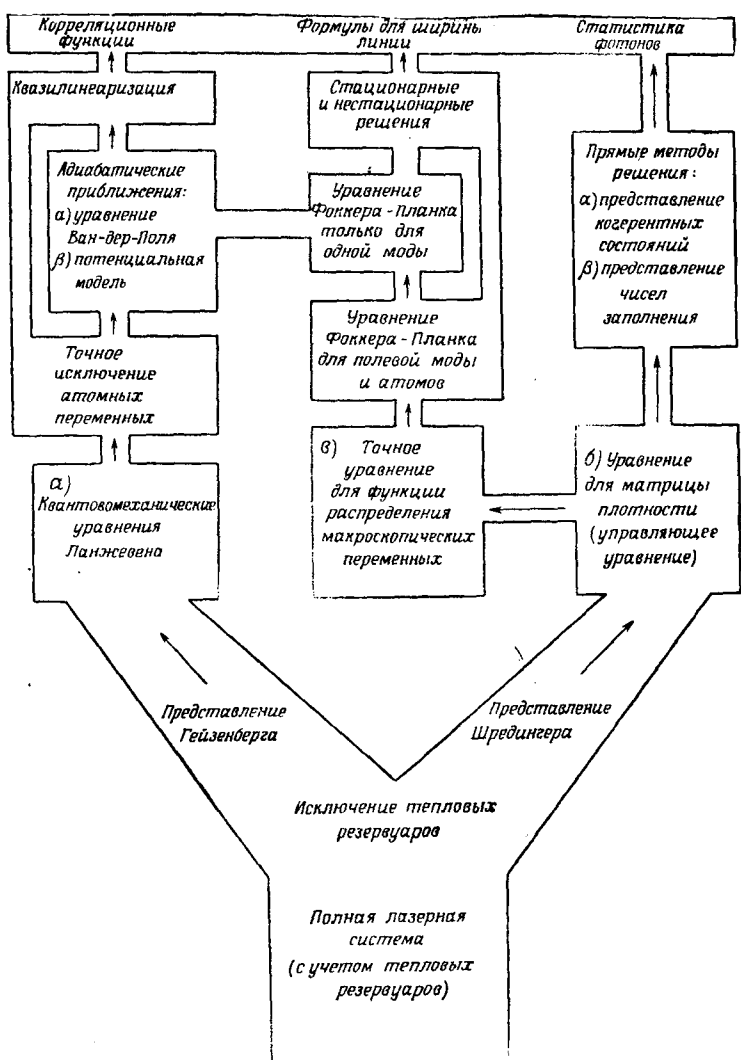
Непосредственные решения для матрицы плотности демонстрируют, в частности, плавный переход от выражения (1) к выражению (2), что согласуется с экспериментами [51, 52, 56].

в) *Классическое* уравнение Фоккера — Планка только для электромагнитного поля, соответствующее квантовомеханическому уравнению Ван дер Поля, позволяет

разд. 3

разд. 2

разд. 1



Фиг. 1. «Генеалогическое древо» лазерных теорий, учитывающих квантовые флуктуации.



Ф и г. 2. Лазер как пример квантостатистического «фазового перехода».

предсказать изменение статистики фотонов [23, 26]. Очень тщательные измерения [51, 52, 56] прекрасно подтверждают это. Позже было получено полуклассическое уравнение Фоккера — Планка с квантовомеханически определенными диссипативными и флуктуационными коэффициентами для активных атомов и поля [28—30]. В достаточно далекой надпороговой области оно было решено путем квазилинеаризации. С помощью адиабатического исключения атомных переменных в уравнениях Ланжевена и использования представления Глаубера [38, 48] удается получить s -численное уравнение Фоккера — Планка только для поля [24]. Недавно из уравнения для матрицы плотности [17] было выведено¹⁾ [18, 21, 22] совершенно точное уравнение фоккер-планковского типа для функции распределения *макроскопических* лазерных переменных (а именно поля, суммарного атомного дипольного момента и полной инверсии).

В настоящих лекциях мы дадим краткий вывод всех этих трех методов и покажем на типичных примерах, как могут быть получены измеряемые величины. Эти измеряемые величины можно выразить с помощью подходящих корреляционных функций, которые были введены и детально рассмотрены Глаубером [38]. Мы проиллюстрируем взаимосвязь известных к настоящему времени лазерных теорий с помощью «генеалогического древа» (фиг. 1).

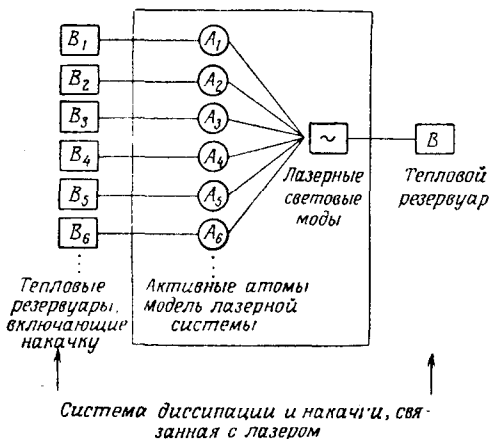
Лазер представляет собой простой пример далекой от теплового равновесия квантовомеханической системы, которая может быть рассмотрена почти точно. Возможно, в частности, детально исследовать фазовый переход (ср. также фиг. 2).

§ 1. Гамильтониан лазерной системы

Все математические рассмотрения лазера исходят по существу из одной и той же лазерной модели, которая

¹⁾ После завершения данной работы нам стало известно, что подобный же подход был развит Гордоном: см. лекции Гордона в книге *Quantum Optics*, New York, 1969. (Изложение работы Гордона имеется в книге: *Дж. Клаудер, Э. Сударшан, Основы квантовой оптики*, изд-во «Мир», 1970. — *Прим. ред.*)

изображена на фиг. 3. Соответствующая этой модели лазерная система состоит из ансамбля атомов μ с гамильтонианом $\sum_{\mu} H_{A_{\mu}}$. Они связаны с набором полевых мод, описываемых гамильтонианом H_L . Гамильтониан взаимодействия между атомами и полем обозначим через $\sum_{\mu} H_{A_{\mu}L}$. Каждый атом в отдельности связан с тепловым резервуаром B_{μ} , гамильтониан которого обозначен через $H_{B_{\mu}}$. Гамильтониан взаимодействия между



Фиг. 3.

атомом и резервуаром обозначен через $H_{B_{\mu}A_{\mu}}$. С другой стороны, полевые моды тоже связаны с тепловым резервуаром B , имеющим гамильтониан H_B . Гамильтониан взаимодействия между полевыми модами и резервуаром B равен H_{LB} . Таким образом, полный гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_{\mu} H_{B_{\mu}} + \sum_{\mu} H_{A_{\mu}B_{\mu}} + \sum_{\mu} H_{A_{\mu}} + \sum_{\mu} H_{A_{\mu}L} + H_L + H_{LB} + H_B. \quad (1.1)$$

Обсудим теперь вкратце явный вид различных членов в полном гамильтониане (1.1).

а) *Модель лазерной системы.* Электромагнитное поле в резонаторе описывается векторным потенциалом \mathbf{A} , который мы разложим по модам резонатора $\mathbf{A}_\lambda(\mathbf{r})$, различающимся индексом λ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi c^2 \hbar}{\omega_{\lambda}}} (b_{\lambda}^{\dagger} + b_{\lambda}) \mathbf{A}_{\lambda}(\mathbf{r}). \quad (1.2)$$

Так, например, в случае стоячих волн мы имеем

$$\mathbf{A}_{\lambda}(\mathbf{r}) \sim \sin(k_{\lambda} x). \quad (1.3)$$

При классическом описании величины b_{λ}^{\dagger} и b_{λ} являются зависящими от времени амплитудами, пропорциональными соответственно $\exp[i\omega_{\lambda}t]$ и $\exp[-i\omega_{\lambda}t]$, тогда как при квантовомеханическом рассмотрении они становятся бозе-операторами, которые подчиняются соотношениям коммутации

$$b_{\lambda} b_{\lambda'}^{\dagger} - b_{\lambda'}^{\dagger} b_{\lambda} = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad b_{\lambda} b_{\lambda'} - b_{\lambda'} b_{\lambda} = b_{\lambda}^{\dagger} b_{\lambda'}^{\dagger} - b_{\lambda'}^{\dagger} b_{\lambda}^{\dagger} = 0. \quad (1.4)$$

Гамильтониан поля H_L задается выражением

$$H_L = \sum_{\lambda} \hbar \omega_{\lambda} b_{\lambda}^{\dagger} b_{\lambda}. \quad (1.5)$$

Атомы либо внедрены в кристаллическую решетку в качестве примесей, либо движутся, как это имеет место в газовом лазере (полупроводниковый лазер в этой лекции не рассматривается).

Пусть атом μ с координатой r_{μ} имеет частоту перехода ϵ_{μ} и поддерживает генерацию лазера. Предположим, что каждый атом имеет один оптический электрон, который мы будем описывать с помощью аппарата вторичного квантования. $a_{\mu j}^{\dagger}$, $a_{\mu j}$ — соответственно операторы рождения и уничтожения j -го электронного состояния μ -го атома. В данной работе мы для простоты ограничимся случаем, когда участвуют только два уровня: $j = 1$ и $j = 2$. При этом подразумевается, что накачка происходит через третий уровень, который опустошается столь быстро, что его заселенностью

можно пренебречь. Операторы подчиняются соотношениям

$$\begin{aligned} a_{\mu j}^+ a_{\mu l} + a_{\mu l} a_{\mu j}^+ &= \delta_{lj}, \\ a_{\mu j} a_{\mu l} + a_{\mu l} a_{\mu j} &= a_{\mu j}^+ a_{\mu l}^+ + a_{\mu l}^+ a_{\mu j}^+ = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Операторы с различными значениями μ можно считать коммутирующими, поскольку электронные волновые функции не перекрываются. Приведем также следующие справедливые в одноэлектронном пространстве операторные соотношения, которые будут полезны в дальнейшем:

$$a_{\mu i}^+ a_{\mu k} a_{\mu j}^+ a_{\mu l} = a_{\mu i}^+ a_{\mu l} \delta_{kj}. \quad (1.7)$$

Гамильтониан активных электронов в атомах теперь равен

$$H_A = \sum_{\mu} H_{A_{\mu}} = \sum_{\mu} \hbar \varepsilon_{\mu} a_{\mu 2}^+ a_{\mu 2}. \quad (1.8)$$

Гамильтониан взаимодействия атомов с полем имеет вид

$$H_{AL} = \sum_{\mu} H_{A_{\mu}L} = \hbar \sum_{\mu} \{ a_{\mu 2}^+ a_{\mu 1} b_{\lambda} g_{\mu\lambda}^* + a_{\mu 1} a_{\mu 2} b_{\lambda}^+ g_{\mu\lambda} \}. \quad (1.9)$$

Первые члены суммы в H_{AL} описывают соответствующие поглощению светового кванта переходы в атомах вверх, тогда как вторые члены описывают обратный процесс. Антирезонансными членами, которые характеризуют, например, одновременное возбуждение атома и излучение фотона, мы, как обычно, пренебрегаем, поскольку их вклад очень мал. Мы пренебрегли также членами, квадратичными относительно векторного потенциала.

Константа связи $g_{\mu\lambda}$ определяется выражением

$$g_{\mu\lambda} = G \sqrt{2} \sin(k_{\lambda x} x) \sin(k_{\lambda y} y) \sin(k_{\lambda z} z), \quad (1.10)$$

где через

$$G = \left(-\frac{e}{m} \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega\nu}} \right) \int \Phi_2^* \mathbf{e} \mathbf{r} \Phi_1 d\tau \quad (1.11)$$

обозначен матричный элемент оптического перехода¹⁾. Для движущихся атомов в газовом лазере величина $g_{\mu\lambda}$ имеет вид

$$g_{\mu\lambda} = -\frac{iG}{2} (\exp[ik_{\lambda}x_{\mu} + ik_{\lambda}v_{\mu}t] - \text{компл. сопр.}) \cos \theta_{\mu\lambda}. \quad (1.10a)$$

Здесь мы для простоты предположили, что мода является чисто аксиальной и не зависит от координат y и z . $\theta_{\mu\lambda}$ — угол между направлением поляризации моды и направлением атомного дипольного момента.

β) *Связь с тепловыми резервуарами.* Вернемся теперь к гамильтонианам тепловых резервуаров и взаимодействию этих резервуаров с лазерной системой. Поскольку переменные тепловых резервуаров в дальнейшем исключаются и их действие будет проявляться только в фундаментальном лазерном уравнении (§ 2) в виде некоторых релаксационных и диссипативных членов, то определять полностью гамильтонианы H_B и $H_{B_{\mu}}$ нет необходимости. Однако гамильтонианы взаимодействия $H_{A_{\mu}B_{\mu}}$ и H_{LB} имеют общую форму

$$H_{AB} = \sum_{\mu} H_{A_{\mu}B_{\mu}} = \sum_{\mu} (\Gamma_{\mu} a_{\mu 2}^{\dagger} a_{\mu 1} + \Gamma_{\mu}^{\dagger} a_{\mu 1}^{\dagger} a_{\mu 2}) + \sum_{j=1, 2} \Theta_{\mu j}^{\dagger} a_{\mu j}^{\dagger} a_{\mu j}, \quad (1.12)$$

$$H_{LB} = \sum_{\lambda} (\Gamma_{\lambda} b_{\lambda}^{\dagger} + \Gamma_{\lambda}^{\dagger} b_{\lambda}) + \sum_{\lambda} \Theta_{\lambda} b_{\lambda}^{\dagger} b_{\lambda}. \quad (1.13)$$

Величины Γ_{μ} , $\Theta_{\mu j}$ и Γ_{λ} , Θ_{λ} являются операторами, которые действуют только на переменные тепловых резервуаров B_{μ} и B соответственно. Первые члены в H_{AB} и H_{LB} описывают такие взаимодействия между тепловыми резервуарами и полем, при которых возбуждаются переходы между уровнями 1 и 2 атомов или между фотонными числами. Вторые члены описывают эффект сбоя фазы, который и создает, как будет показано ниже, различие между «продольными» и «поперечными» релаксационными константами. Приведенный в этом параграфе полный гамильтониан (1.1) является исходным пунктом при выводе фундаментальных лазерных уравнений.

1) Здесь v — занимаемый объем. — Прим. ред.

§ 2. Вывод фундаментальных лазерных уравнений

Упомянутые во введении три эквивалентные формулировки фундаментальных лазерных уравнений, включающих квантовые флуктуации, получаются теперь просто: а) при выводе уравнений движения относительно лазерных переменных с использованием гейзенберговского представления или б) при выводе уравнения движения (управляющего уравнения) для матрицы плотности в шредингеровском представлении. Уравнение Фоккера—Планка «в» для c -численной функции распределения макроскопических наблюдаемых лазерных величин первоначально было получено при полуклассическом рассмотрении [26—31], однако теперь оно может быть выведено точно [22] (в обобщенной форме) из управляющего уравнения «б». Во всех этих случаях для получения уравнений, в которые входят только лазерные переменные, необходимо применить процедуру исключения переменных тепловых резервуаров. Прежде чем углубиться в детали, хотелось бы отметить формальную аналогию в структуре уравнений «а», «б» и «в».

а) Уравнение движения для наблюдаемой переменной Ω лазерной системы в общем случае имеет вид

$$\frac{d\Omega}{dt} = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)_{\text{ког}} + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)_{\text{неког}} \quad (2.1)$$

где

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t}\right)_{\text{ког}} = \frac{i}{\hbar} [(H_A + H_L + H_{AL}), \Omega]. \quad (2.2)$$

б) С другой стороны, уравнение движения для матрицы плотности имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{\text{ког}} + \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{\text{неког}}, \quad (2.3)$$

где в представлении взаимодействия

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{\text{ког}} = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_{AL}, \rho]. \quad (2.4)$$

в) Наконец, обобщенное уравнение Фоккера—Планка для функции распределения f макроскопических ла-

зерных переменных может быть записано следующим образом:

$$\frac{df}{dt} = L_{\text{ког}}f + L_{\text{неког}}f, \quad (2.5)$$

где $L_{\text{ког}}$ и $L_{\text{неког}}$ — дифференциальные операторы Лиувилля. Когерентные части $(\partial\Omega/\partial t)_{\text{ког}}$, $(\partial\rho/\partial t)_{\text{ког}}$ и $L_{\text{ког}}f$ временной зависимости в (2.1), (2.3) и (2.5) соответственно связаны с гамильтонианом $(H_A + H_L + H_{AL})$ лазерной системы, включающей взаимодействие атомов с полем, тогда как некогерентные части $(\partial\Omega/\partial t)_{\text{неког}}$, $(\partial\rho/\partial t)_{\text{неког}}$ и $L_{\text{неког}}f$ этой временной зависимости обусловлены диссипативным и флуктуационным воздействием тепловых резервуаров.

2.1. Уравнения Ланжевена. Вводя операторы дипольного момента

$$\alpha_{\mu}^{\dagger} = (a_{\mu 2}^{\dagger} a_{\mu 1}), \quad \alpha_{\mu} = (a_{\mu 1}^{\dagger} a_{\mu 2}) \quad (2.6)$$

и инверсии

$$\sigma_{\mu} = n_{\mu 2} - n_{\mu 1}, \quad \text{где } n_{\mu j} = a_{\mu j}^{\dagger} a_{\mu j}, \quad (2.7)$$

и используя (2.2) с гамильтонианами (1.5), (1.8), (1.9), мы немедленно получаем когерентную часть операторных уравнений

$$\left(\frac{\partial b_{\lambda}^{\dagger}}{\partial t}\right)_{\text{ког}} = i\omega_{\lambda} b_{\lambda}^{\dagger} + i \sum_{\mu} g_{\mu\lambda}^* \alpha_{\mu}^{\dagger}, \quad (2.8)$$

$$\left(\frac{\partial \alpha_{\mu}}{\partial t}\right)_{\text{ког}} = i e_{\mu} \alpha_{\mu}^{\dagger} - i \sum_{\lambda'} g_{\mu\lambda'} b_{\lambda'}^{\dagger} \sigma_{\mu}, \quad (2.9)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_{\mu}}{\partial t}\right)_{\text{ког}} = 2i\alpha_{\mu} \sum_{\lambda''} g_{\mu\lambda''} b_{\lambda''}^{\dagger} - 2i\alpha_{\mu}^{\dagger} \sum_{\lambda''} g_{\mu\lambda''}^* b_{\lambda''}. \quad (2.10)$$

Для определения некогерентных частей временных производных этих операторов необходимо учесть два эффекта, обусловленных действием на лазерную систему тепловых резервуаров.

а) Если на лазерные переменные воздействуют только одни тепловые резервуары, то ожидаемые средние

значения этих переменных будут релаксировать к стационарным значениям. (Амплитуда поля, например, экспоненциально затухает.)

β) Кроме того, тепловые резервуары приводят к таким флуктуациям лазерных операторов, которые, в частности, обеспечивают сохранение свойств этих операторов (например, коммутационных соотношений) в течение времени развития системы.

Если уравнения движения для *ожидаемых средних значений* операторов Ω_j , находящихся под действием тепловых резервуаров, имеют общий вид

$$\frac{d \langle \Omega_j \rangle}{dt} = \langle f(\Omega_j) \rangle, \quad (2.11)$$

где $f(\Omega_j)$ содержит некоторые релаксационные и переходные константы, то флуктуационный эффект действия тепловых резервуаров на сами операторы будет учтен правильно, если их временные производные под влиянием тепловых резервуаров принимают форму

$$\left(\frac{d\Omega_j}{dt} \right)_{\text{неког}} = f(\Omega_j) + \Gamma_j(t). \quad (2.12)$$

Здесь Γ_j — стохастический оператор силы Ланжевена, который, как видно из сравнения выражений (2.11) и (2.12), должен, очевидно, удовлетворять условию

$$\langle \Gamma_j \rangle = 0. \quad (2.13)$$

В дальнейшем мы будем полагать, что взаимодействующие с системой тепловые резервуары имеют короткую память, т. е. являются марковскими. В этом случае корреляционные функции операторных сил Ланжевена равны

$$\langle \Gamma_j(t_2) \Gamma_j(t_1) \rangle = g_{jj} \delta(t_2 - t_1). \quad (2.14)$$

Концепция введения шума спонтанного излучения с помощью таких атомных квантовомеханических шумовых источников марковского вида в настоящее время является общепризнанной и свойства операторов Γ были изучены очень подробно (для полевых операторов см. [47]; для атомных операторов см. [2, 4, 5, 32, 39, 46]).

Нетрудно, в частности, показать, что флуктуационные коэффициенты g_{ji} определены постулатом β , который утверждает, что операторные свойства величины Ω ; сохраняются во времени.

Если, например, уравнения движения для ожидаемых средних значений операторов $a_{i_1}^\dagger a_{i_2}$ n -уровневого атома задаются как

$$\frac{d \langle a_{i_1}^\dagger a_{i_2} \rangle}{dt} = \sum_{l_1 l_2} M_{i_1 l_2 l_1 l_2} \langle a_{l_1}^\dagger a_{l_2} \rangle \quad (2.11a)$$

и соответствующее операторное уравнение имеет вид

$$\frac{d(a_{i_1}^\dagger a_{i_2})}{dt} = \sum_{l_1 l_2} M_{i_1 l_2 l_1 l_2} (a_{l_1}^\dagger a_{l_2}) + \Gamma_{i_1 i_2}(t), \quad (2.12a)$$

где

$$\langle \Gamma_{i_1 i_2}(t) \rangle = 0, \quad (2.13a)$$

$$\langle \Gamma_{i_1 i_2}(t_2) \Gamma_{l_1 l_2}(t_1) \rangle = g_{i_1 l_2 l_1 l_2} \delta(t_2 - t_1), \quad (2.14a)$$

то коэффициенты $g_{i_1 l_2 l_1 l_2}$ можно определить с помощью операторного соотношения

$$a_i^\dagger a_k a_l^\dagger a_m = \delta_{kl} a_i^\dagger a_m,$$

справедливого для всех времен. В результате получаем

$$g_{i_1 l_2, l_1 l_2} = \sum_{m, n} \{ \delta_{l_2 l_1} M_{i_1 l_2; m, n} - \delta_{n l_2} M_{i_1 l_2; m l_1} - \delta_{m l_1} M_{i_1 l_2; l_2 n} \}. \quad (2.15)$$

После этих предварительных замечаний мы можем выписать выражения $(\partial \Omega / \partial t)_{\text{неког}}$ для лазерных наблюдаемых переменных:

$$\left(\frac{\partial b_\lambda^\dagger}{\partial t} \right)_{\text{неког}} = -\kappa b_\lambda^\dagger + F_\lambda(t), \quad (2.16)$$

$$\left(\frac{\partial \alpha_\mu^\dagger}{\partial t} \right)_{\text{неког}} = -\gamma \alpha_\mu^\dagger + \Gamma_{21, \mu}, \quad (2.17)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_\mu}{\partial t} \right)_{\text{неког}} = \frac{d_0 - \sigma_\mu}{T_p} + (\Gamma_{22, \mu} - \Gamma_{11, \mu}). \quad (2.18)$$

Величины $\Gamma_{21, \mu}$, $\Gamma_{22, \mu}$, $\Gamma_{11, \mu}$ представляют собой частный случай введенных в (2.12a) величин $\Gamma_{i_1 i_2}(t)$. $F_\lambda(t)$ — стохастический оператор силы, действующий на полевую

моду λ . Как показал Сеницкий [47], корреляционная функция этого оператора равна

$$\langle F_\lambda(t_2) F_\lambda(t_1) \rangle = \left\{ -\frac{i\kappa}{\pi} \frac{P}{t_2 - t_1} + 2\kappa \left(n_{\text{тепл}} + \frac{1}{2} \right) \delta(t_2 - t_1) \right\}, \quad (2.19)$$

где $n_{\text{тепл}}$ — число тепловых квантов в моде λ . Объединяя уравнения (2.8) — (2.10) и (2.16) — (2.18), мы получаем полную систему ланжевеновских операторных уравнений для лазерных переменных:

$$\frac{db_\lambda^\dagger}{dt} = (i\omega_\lambda - \kappa) b_\lambda^\dagger + i \sum_\mu g_{\mu\lambda}^* \alpha_\mu^\dagger + F_\lambda, \quad (2.20)$$

$$\frac{d\alpha_\mu^\dagger}{dt} = (i\varepsilon_\mu - \gamma) \alpha_\mu^\dagger - i \sum_{\lambda'} g_{\mu\lambda'} b_{\lambda'}^\dagger \sigma_\mu + \Gamma_{21, \mu}, \quad (2.21)$$

$$\frac{d\sigma_\mu}{dt} = \frac{d_0 - \sigma_\mu}{T_p} + 2i\alpha_\mu \sum_{\lambda''} g_{\mu\lambda''} b_{\lambda''}^\dagger - 2i\alpha_\mu^\dagger \sum_{\lambda''} g_{\mu\lambda''}^* b_{\lambda''} + \Delta\Gamma_\mu. \quad (2.22)$$

Эти уравнения будут обсуждаться ниже в разд. 3а.

2.2. Управляющее уравнение. При выводе управляющего уравнения ограничимся простейшим случаем, а именно: одномодовой генерацией (имеется только один индекс λ , который опущен), случаем бегущих волн (константы связи $g_{\mu\lambda} = g$ не зависят от μ) и точным резонансом между частотой $\omega_\lambda = \omega$ лазерной моды и частотой перехода $\varepsilon_\mu = \varepsilon$ между однородно уширенными атомными уровнями 1 и 2.

Снова нетрудно получить когерентную часть временной производной матрицы плотности ρ . В нашем случае в представлении взаимодействия имеем

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\text{ког}} = \frac{(-i)}{\hbar} [\tilde{H}_{AL}, \rho] = (-i) g \left[\sum_\mu (\alpha_\mu^\dagger b + \alpha_\mu b^\dagger), \rho \right]. \quad (2.23)$$

Дадим теперь краткий общий вывод выражения для $(\partial\rho/\partial t)_{\text{неког}}$, справедливого в марковском приближении. Уравнение движения для матрицы плотности F системы

S (лазерной системы) и связанного с S теплового резервуара B в представлении взаимодействия имеет вид

$$\frac{dF(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_{SB}(t), F(t)], \quad (2.24)$$

где

$$\begin{aligned} H &= H_S + H_B + H_{SB} \equiv H_0 + H_{SB}, \\ \tilde{H}_{SB} &= \exp\left[\frac{i}{\hbar} H_0 t\right] H_{SB} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H_0 t\right]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Исходя из начального условия

$$F(0) = B \times \rho(0), \quad B = \frac{\exp[-H_B/kT]}{\text{Sp}_B(\exp[-H_B/kT])}, \quad (2.26)$$

которое означает, что в момент времени $t = 0$ резервуар описывается каноническим равновесным оператором B , во втором порядке теории возмущений получаем

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \rho(0) + \left(\frac{-i}{\hbar}\right) \text{Sp}_B \int_0^t [\tilde{H}_{BS}(\tau), F(0)] d\tau + \\ &+ \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \text{Sp}_B \int_0^t d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \{\tilde{H}_{SB}(\tau_2), [\tilde{H}_{SB}(\tau_1), F(0)]\}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Здесь мы уже взяли след по переменным резервуара и использовали приведенную матрицу плотности $\rho(t) = \text{Sp}_B F(t)$ системы S .

Для простоты рассмотрим только ту часть H_{SB} , которая возбуждает переходы в S ; этот член теперь может быть записан в общей форме

$$H_{SB} = \sum_{IJ} (S_I \Gamma_{IJ}^\dagger + S_J^\dagger \Gamma_{IJ}), \quad (2.28)$$

причем

$$\begin{aligned} \tilde{S}_J(t) &= \exp\left[\frac{i}{\hbar} H_0 t\right] S_J \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H_0 t\right] = \exp[-i\varepsilon_J t] S_J, \\ \tilde{\Gamma}_{IJ}(t) &= \exp\left[\frac{i}{\hbar} H_0 t\right] \Gamma_{IJ} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} H_0 t\right] = \\ &= \exp[-i\omega_{IJ} t] \Gamma_{IJ}, \quad \omega_{IJ} > 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

в согласии с (1.12) и (1.13). Операторы S_j и Γ_{lj} здесь действуют только на переменные системы S и резервуара B соответственно. Условие $\omega_{lj} > 0$ означает, что для состояний теплового резервуара $|m\rangle$ и $|n\rangle$, принадлежащих одному и тому же собственному энергетическому значению гамильтониана H_B , мы положили $(m|\Gamma_{lj}|n) = 0$. Поэтому член первого порядка в (2.27) исчезает, тогда как член второго порядка равен

$$\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \sum_{\substack{l \\ ik}} \{ \exp[i(\omega_{lj} - \varepsilon_j)\tau_2 - i(\omega_{ki} - \varepsilon_i)\tau_1] \times \\ \times \text{Sp}_B [S_j \Gamma_{lj}^+ [S_i^+ \Gamma_{ki}, F(0)]] + \text{компл. сопр.} \}, \quad (2.30)$$

где члены с $\omega_{lj} \neq \omega_{ki}$ снова исчезают, поскольку $F(0)$ в энергетическом представлении теплового резервуара диагональны. Если еще пренебречь малыми нерезонансными осциллирующими членами с $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$, то для оставшихся членов можно провести интегрирование по времени

$$\int_0^t d\tau_2 \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \exp[i(\omega_{lj} - \varepsilon_j)(\tau_2 - \tau_1)] \approx \\ \approx \left(i \frac{P}{\omega_{lj} - \varepsilon_j} + \pi \delta(\omega_{lj} - \varepsilon_j) \right) t. \quad (2.31)$$

Применимость этой формулы ограничена временами, превышающими наибольшие из величин $(\omega_{lj} - \varepsilon_j)^{-1}$, входящих в (2.3), а также тем, что вычисление $\sum_{l,k}$ заменялось интегрированием по $\omega_{lj} = \omega_{ki}$ и степеням свободы теплового резервуара. Вводя теперь

$$c_{lj, ki} = \text{Sp}_B (\Gamma_{lj} \Gamma_{ki}^+ B) \quad (2.32)$$

и константы перехода

$$C_{jl}(\varepsilon_i = \varepsilon_j) = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \pi \sum_{l, k} \delta(\omega_{lj} - \varepsilon_j) c_{lj, ki}, \\ D_{jl}(\varepsilon_i = \varepsilon_j) = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 \pi \sum_{l, k} \frac{P}{\omega_{lj} - \varepsilon_j} c_{lj, ki}, \quad (2.33)$$

для некогерентной временной производной получаем в результате ¹⁾

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho(t) - \rho(0)}{t} &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\text{неког}} = \\ &= \sum_{\substack{i, j \\ e_i = e_j}} \{ C_{ji}(e_i) ([S_j, S_i^+ \rho] + [S_j^+, S_i \rho]) + \text{эрмит. сопр.} \} + \\ &+ i \sum_{\substack{i, j \\ e_i = e_j}} \{ D_{ji}(e_i) ([S_j, S_i^+ \rho] - [S_j^+, S_i \rho]) - \text{эрмит. сопр.} \}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Уравнение (2.34) остается справедливым при всех временах, если в духе предположения о марковском характере резервуары остаются почти невозмущенными и если условие (2.26) приближенно справедливо для всех времен. В случае лазерной системы с ее диссипативным резервуаром и резервуаром накачки это предположение выполняется с прекрасной степенью точности. Можно отметить, что из вида (2.34) для $(\partial \rho / \partial t)_{\text{неког}}$ немедленно следует, что $\text{Sp}_{SP}(\rho(t))$ постоянен во времени. Если теперь ограничить общий вывод $(\partial \rho / \partial t)_{\text{неког}}$ случаем нашей лазерной системы, которая посредством гамильтонианов (1.12), (1.13) взаимодействует с независимыми тепловыми резервуарами B_μ и B (ср. фиг. 3), то мы получим

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\text{неког}} = \sum_{\mu} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{A_\mu} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_L, \quad (2.35)$$

¹⁾ Здесь $\lim_{t \rightarrow 0}$ следует понимать в том смысле, что вкладками высших порядков теории возмущений можно пренебречь, но t все еще достаточно велико, чтобы справедливость соотношения (2.31) не нарушалась.

где

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{A_\mu} &= \frac{\gamma_{21}}{2} \{[\alpha_\mu, \rho \alpha_\mu^\dagger] + [\alpha_\mu \rho, \alpha_\mu^\dagger]\} + \\ &+ \frac{\gamma_{12}}{2} \{[\alpha_\mu^\dagger, \rho \alpha_\mu] + [\alpha_\mu^\dagger \rho, \alpha_\mu]\} + \frac{\eta}{2} \{[n_{\mu 1}, \rho n_{\mu 2}] + [n_{\mu 2} \rho, n_{\mu 1}]\}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_L &= \nu [b, \rho b^\dagger] + \nu [b \rho, b^\dagger] + \delta [b^\dagger, \rho b] + \delta [b^\dagger \rho, b] \equiv \\ &\equiv \kappa \{[b \rho, b^\dagger] + [b, \rho b^\dagger]\} + 2\kappa n_{\text{тепл}} \{[b, \rho], b^\dagger\}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Здесь γ_{21} , γ_{12} , η , ν , δ , κ — константы затухания и накачки, вводимые с помощью соотношений, подобных (2.32) и (2.33). Величины γ_{12} и γ_{21} — константы перехода для переходов с атомного уровня 1 на уровень 2 и с уровня 2 на уровень 1 соответственно; η описывает процесс сбоя фазы, не связанный с переходами; $\kappa = (\nu - \delta)$ — константа затухания для фотонов и $\delta/\kappa = n_{\text{тепл}}$ — тепловое среднее число фотонов в моде. Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести «продольную» и «поперечную» константы перехода и равновесный параметр инверсии σ_0 для не связанных с полем атомов

$$\gamma_{\parallel} = \gamma_{12} + \gamma_{21}, \quad \gamma_{\perp} = \frac{1}{2}(\gamma_{21} + \gamma_{12} + \eta), \quad \sigma_0 \equiv \frac{\gamma_{12} - \gamma_{21}}{\gamma_{12} + \gamma_{21}}. \quad (2.38)$$

Полное уравнение движения для матрицы плотности ρ выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{\text{ког}} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{\text{неког}} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{\text{ког}} + \sum_{\mu} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{A_\mu} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_L, \quad (2.39)$$

причем в правую часть мы должны подставить выражения (2.23), (2.36) и (2.37). Это соотношение представляет собой операторное уравнение для системы из поля и атомов и его форма не зависит от представления, используемого для описания системы. Теперь мы, конечно, можем легко перейти, например, к представлению чисел заполнения или к диагональному представлению в когерентных глауберовых состояниях, что и будет сделано в разд. 3б.

2.3. Точное уравнение для функции распределения макроскопических переменных. Выведенное в разд. 2.2 уравнение для матрицы плотности содержит очень большое число микроскопических атомных операторов, которые, однако, не нужны, когда, например, требуется вычислить важные корреляционные функции электромагнитного поля. По этой причине мы займемся поисками такого метода, с помощью которого было бы возможно строгим образом получить уравнение движения для c -численной функции распределения $f(u, u^*, v, v^*, I; t)$ макроскопических c -численных лазерных переменных, соответствующих макроскопическим квантовомеханическим операторам согласно следующей схеме:

Операторы \leftrightarrow соответствующие c -численные переменные

Поле	$b \leftrightarrow u,$ $b^\dagger \leftrightarrow u^*,$	
Полный атомный дипольный момент	$S^+ = \sum_{\mu} \alpha_{\mu}^{\dagger} \leftrightarrow v^*,$	(2.40)
	$S^- = \sum_{\mu} \alpha_{\mu} \leftrightarrow v,$	
$1/2$ полной инверсии	$S_z = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \sigma_{\mu} = \sum_{\mu} s_{z\mu} \leftrightarrow I.$	

Определим функцию f как

$$f(u, u^*, v, v^*, I; t) = N' \int \dots \int \exp[-i(v\xi + v^*\xi^* + \zeta I + u\beta + u^*\beta^*)] F(\xi\xi^*\zeta, \beta, \beta^*; t) d^2\xi d\zeta d^2\beta, \quad (2.41)$$

где

$$F = \text{Sp} \{ \exp[i\xi S^-] \exp[i\zeta S_z] \exp[i\xi^* S^+] \exp[i\beta^* b^\dagger] \exp[i\beta b] \rho(t) \} \equiv \text{Sp} \{ 0(\xi, \xi^*, \zeta, \beta, \beta^*) \rho(t) \}. \quad (2.42)$$

N' — нормировочная константа, так что

$$\int f(\dots) d^2u d^2v dI = 1. \quad (2.43)$$

Определение (2.41) гарантирует вещественность функции f при условии, что оператор ρ эрмитов. Отметим,

однако, что функция f не обязательно положительна. Поэтому она не имеет обычного смысла распределения вероятности, а просто служит инструментом для вычисления всех квантовомеханических средних значений с помощью только c -численных операций. Например, используя интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned}
 & \int f(u, u^*, v, v^*, I; t) u^{*m} u^n d^2u d^2v dI = \\
 & = N' \int \dots \int \left(\frac{\partial^{m+n}}{\partial (-\beta^*)^m \partial (-\beta)^n} \times \right. \\
 & \times \exp[-i\{v\xi + v^*\xi^* + \zeta I + u\beta + u^*\beta^*\}] \times \\
 & \times F(\xi, \xi^*, \zeta, \beta, \beta^*; t) d^2u d^2v dI d^2\xi d\zeta d^2\beta = \\
 & = N' \int \dots \int \exp[-i\{v\xi + v^*\xi^* + \zeta I + u\beta + u^*\beta^*\}] \times \\
 & \times \text{Sp} \{ b^{+m} O(\xi, \xi^*, \zeta, \beta, \beta^*) b^n \rho(t) \} d^2u d^2v dI d^2\xi d\zeta d^2\beta = \\
 & = \text{Sp} \{ b^{+m} O(0, 0, 0, 0, 0) b^n \rho(t) \} = \text{Sp} (b^{+m} b^n \rho(t)). \quad (2.44)
 \end{aligned}$$

Эта же самая процедура может быть использована для вычисления средних значений функций макроскопических атомных переменных S^+ , S^- , S_z . Применяя определение (2.41) только к одному полю, нетрудно показать, что наша функция $f(u, u^*)$ идентична амплитуде $f(u, u^*)$ диагонального представления по глауберовым состояниям полевой матрицы плотности $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho} = \int |u\rangle f(u, u^*) \langle u| d^2u. \quad (2.45)$$

Выведем теперь уравнение движения для $f(u, u^*, v, v^*, I, t)$:

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{dt} = N \int \exp[-i(\xi v + \xi^* v^* + \zeta I + \beta^* u^* + \beta u)] \times \\
 \times \frac{\partial F(\xi, \xi^*, \zeta, \beta, \beta^*; t)}{\partial t} d^2\xi d\zeta d^2\beta. \quad (2.46)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} = \text{Sp} \left\{ O \frac{d\rho}{dt} \right\} = \text{Sp} \left\{ O \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\text{кор}} \right\} + \text{Sp} \left\{ O \sum_{\mu} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{A_{\mu}} \right\} + \\ + \text{Sp} \left\{ O \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_L \right\} = \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{AZ} + \sum_{\mu} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{A_{\mu}} + \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_L, \quad (2.47) \end{aligned}$$

где использовано управляющее уравнение (2.39). Для точного вычисления членов в правой части формулы (2.47) удобно разложить оператор

$$O = \exp [i\xi S^-] \exp [i\zeta S_z] \exp [i\xi^* S^+] \exp [i\beta^* b^+] \exp [i\beta b]$$

следующим образом:

$$O = O_A \cdot O_F, \quad (2.48)$$

где

$$\begin{aligned} O_A = \prod_{\mu=1}^N O_{A_{\mu}} = O_{A_{\nu}} \cdot O'_{A_{\nu}}, \\ O'_{A_{\nu}} = \prod_{\mu \neq \nu}^N O_{A_{\mu}} \end{aligned} \quad (2.49)$$

и

$$\begin{aligned} O_{A_{\mu}} = \exp [i\xi \alpha_{\mu}] \exp [i\zeta s_{z\mu}] \exp [i\xi^* \alpha_{\mu}^{\dagger}], \\ O_F = \exp [i\beta^* b^+] \exp [i\beta b]. \end{aligned} \quad (2.50)$$

С помощью циклических перестановок операторов под знаком следа мы получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{A_{\mu}} = \text{Sp} \left\{ O \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{A_{\mu}} \right\} = \\ = \frac{\gamma_{21}}{2} \{ 2 \text{Sp} [\alpha_{\mu}^{\dagger} O_{A_{\mu}} \alpha_{\mu} O'_{A_{\mu}} \rho] - \text{Sp} [\alpha_{\mu}^{\dagger} \alpha_{\mu} O_{A_{\mu}} O'_{A_{\mu}} \rho] - \\ - \text{Sp} [O_{A_{\mu}} \alpha_{\mu}^{\dagger} \alpha_{\mu} O'_{A_{\mu}} \rho] \} + \frac{\gamma_{12}}{2} \{ 2 \text{Sp} [\alpha_{\mu} O_{A_{\mu}} \alpha_{\mu}^{\dagger} O'_{A_{\mu}} \rho] - \\ - \text{Sp} [\alpha_{\mu} \alpha_{\mu}^{\dagger} O_{A_{\mu}} O'_{A_{\mu}} \rho] - \text{Sp} [O_{A_{\mu}} \alpha_{\mu} \alpha_{\mu}^{\dagger} O'_{A_{\mu}} \rho] \} + \\ + \frac{\eta}{2} \{ 2 \text{Sp} [s_{z\mu} O_{A_{\mu}} s_{z\mu} O'_{A_{\mu}} \rho] - \text{Sp} [s_{z\mu}^2 O_{A_{\mu}} O'_{A_{\mu}} \rho] - \\ - \text{Sp} [O_{A_{\mu}} s_{z\mu}^2 O'_{A_{\mu}} \rho] \}. \quad (2.51) \end{aligned}$$

Теперь имеющиеся под знаком следа выражения типа $\alpha_\mu^\dagger O_{A_\mu} \alpha_\mu$, $\alpha_\mu O_{A_\mu} \alpha_\mu^\dagger \dots$ всегда могут быть преобразованы в линейную комбинацию операторов

$$\begin{aligned} O_{A_\mu}, \\ \frac{\partial O_{A_\mu}}{\partial (i\xi)} &= \alpha_\mu \exp [i\xi \alpha_\mu] \exp [i\zeta s_{z_\mu}] \exp [i\xi^* \alpha_\mu^\dagger], \\ \frac{\partial O_{A_\mu}}{\partial (i\xi^*)} &= \exp [i\xi \alpha_\mu] s_{z_\mu} \exp [i\zeta s_{z_\mu}] \exp [i\xi^* \alpha_\mu^\dagger], \\ \frac{\partial O_{A_\mu}}{\partial (i\xi^*)} &= \exp [i\xi \alpha_\mu] \exp [i\zeta s_{z_\mu}] \alpha_\mu^\dagger \exp [i\xi^* \alpha_\mu^\dagger], \end{aligned} \quad (2.52)$$

если использовать: 1) коммутационные соотношения между α_μ , s_{z_μ} , α_μ^\dagger и экспоненциальные выражения $\exp [i\xi \alpha_\mu]$, $\exp [i\zeta s_{z_\mu}]$, $\exp [i\xi^* \alpha_\mu^\dagger]$ и 2) тот факт, что произведения операторов α_μ , s_{z_μ} , α_μ^\dagger можно разложить линейно по 1, α_μ , s_{z_μ} , α_μ^\dagger . Мы получим, например,

$$\begin{aligned} \alpha_\mu^\dagger O_{A_\mu} \alpha_\mu &= \\ &= \left[\frac{1}{2} \exp [-i\zeta] + \frac{1}{2} \exp [i\zeta] (i\xi)^2 (i\xi^*)^2 + (i\xi) (i\xi^*) \right] O_{A_\mu} + \\ &\quad + i\xi [- (i\xi) (i\xi^*) - \exp [-i\zeta]] \frac{\partial O_{A_\mu}}{\partial (i\xi)} + \\ &\quad + i\xi^* [- (i\xi) (i\xi^*) - \exp [-i\zeta]] \frac{\partial O_{A_\mu}}{\partial (i\xi^*)} + \\ &\quad + [\exp [-i\zeta] - \exp [i\zeta] (i\xi)^2 (i\xi^*)^2] \frac{\partial O_{A_\mu}}{\partial (i\xi)}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

С помощью этих соотношений мы можем выразить

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_A \equiv \sum_\mu \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{A_\mu}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_A = & \\
 = \frac{\gamma_{21}}{2} & \left\{ [\exp[-i\zeta] - 1 + \exp[i\zeta] (i\xi)^2 (i\xi^*)^2 + 2(i\xi)(i\xi^*)] NF + \right. \\
 + 2i\xi & \left[-(i\xi)(i\xi^*) - \exp[-i\zeta] + \frac{1}{2} \right] \frac{\partial F}{\partial (i\xi)} + \\
 + 2i\xi^* & \left[-(i\xi)(i\xi^*) - \exp[-i\zeta] + \frac{1}{2} \right] \frac{\partial F}{\partial (i\xi^*)} + \\
 + [2(\exp[-i\zeta] - 1) - 2\exp[i\zeta] (i\xi)^2 (i\xi^*)^2] & \frac{\partial F}{\partial (i\zeta)} \left. \right\} + \\
 + \frac{\gamma_{12}}{2} & \left\{ (\exp[i\zeta] - 1) NF + i\xi \frac{\partial F}{\partial (i\xi)} - i\xi^* \frac{\partial F}{\partial (i\xi^*)} - \right. \\
 - 2(\exp[i\zeta] - 1) \frac{\partial F}{\partial (i\zeta)} & \left. \right\} + \frac{\eta}{2} \left\{ (i\xi)(i\xi^*) \exp[i\zeta] NF - i\xi \frac{\partial F}{\partial (i\xi)} - \right. \\
 - i\xi^* \frac{\partial F}{\partial (i\xi^*)} - 2i\xi i\xi^* \exp[i\zeta] & \left. \frac{\partial F}{\partial (i\zeta)} \right\}. \quad (2.54)
 \end{aligned}$$

Совершенно аналогично для

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{AL} = & \\
 = -ig \{ \text{Sp} \{ [OS^+b + OS^-b^+] \rho \} - \text{Sp} \{ [S^+bO + S^-b^+O] \rho \} \} & \\
 & (2.55)
 \end{aligned}$$

получаем формулу

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{AL} = -ig \left\{ \frac{\partial}{\partial (i\xi^*)} \frac{\partial}{\partial (i\beta)} - \frac{\partial}{\partial (i\xi)} \frac{\partial}{\partial (i\beta)} + \right. & \\
 + \left[\exp[-i\zeta] \frac{\partial}{\partial (i\xi)} - (i\xi^*)^2 \frac{\partial}{\partial (i\xi^*)} + 2i\xi^* \frac{\partial}{\partial (i\zeta)} \right] \left(\frac{\partial}{\partial (i\beta^*)} + i\beta \right) - & \\
 - \left[\exp[-i\zeta] \frac{\partial}{\partial (i\xi^*)} - (i\xi)^2 \frac{\partial}{\partial (i\xi)} + 2i\xi \frac{\partial}{\partial (i\zeta)} \right] \left(\frac{\partial}{\partial (i\beta)} + i\beta^* \right) \left. \right\} F & \\
 & (2.56)
 \end{aligned}$$

и для

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_F = \kappa \text{Sp} \{ [2b^+O_F b - O_F b^+ b - b^+ b O_F] O_{A\rho} \} + & \\
 + 2\chi n_{\text{тепл}} \text{Sp} \{ [b^+ O_F b - b b^+ O_F - O_F b^+ b + b O_F b^+] O_{A\rho} \} & \quad (2.57)
 \end{aligned}$$

выражение

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_F = -\kappa \left[i\beta \frac{\partial}{\partial(i\beta)} + i\beta^* \frac{\partial}{\partial(i\beta^*)} \right] F + 2\kappa n_{\text{тепл}}(i\beta^*)(i\beta) F. \quad (2.58)$$

При вычислении (2.56) и (2.58) мы использовали операторные соотношения типа

$$\begin{aligned} O_A S^- &= \exp[-i\xi] \frac{\partial O_A}{\partial(i\xi)} - (i\xi^*)^2 \frac{\partial O_A}{\partial(i\xi^*)} + 2i\xi^* \frac{\partial O_A}{\partial(i\xi)}, \\ O_F b &= \frac{\partial O_F}{\partial(i\beta)}, \quad O_F b^+ = \left(\frac{\partial}{\partial(i\beta^*)} + i\beta \right) O_F, \\ b O_F b^+ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial(i\beta^*) \partial(i\beta)} + 1 + i\beta^* \frac{\partial}{\partial(i\beta^*)} + i\beta \frac{\partial}{\partial(i\beta)} + (i\beta^*)(i\beta) \right] F, \end{aligned} \quad (2.59)$$

которые могут быть получены способом, подобным тому, который приводит к (2.35). В заключение мы должны, используя определение (2.41), преобразовать выражение (2.47) для $\partial F/\partial t$ в уравнении движения (2.46) в соответствующее выражение для фурье-образа f . Уравнение движения для функции распределения f принимает тогда вид [ср. (2.5)]

$$\frac{df}{dt} = L_{\text{кор}} f + L_{\text{некор}} f = L_{AL} f + L_A f + L_L f, \quad (2.60)$$

где операторы Лиувилля L_{AL} , L_A , L_L определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{AL} &= -ig \left\{ v^* u - u^* v + \left[\exp\left[\frac{\partial}{\partial I}\right] v - \frac{\partial^2}{\partial v^{*2}} v^* - 2 \frac{\partial}{\partial v^*} I \right] \times \right. \\ &\times \left. \left(-\frac{\partial}{\partial u} + u^* \right) - \left[\exp\left[\frac{\partial}{\partial I}\right] v^* - \frac{\partial^2}{\partial v^2} v - 2 \frac{\partial}{\partial v} I \right] \left(-\frac{\partial}{\partial u^*} + u \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} L_A &= \frac{\gamma_{21}}{2} \left\{ N \left(\exp\left[\frac{\partial}{\partial I}\right] - 1 \right) + N \exp\left[-\frac{\partial}{\partial I}\right] \frac{\partial^4}{\partial v^2 \partial v^{*2}} + \right. \\ &+ 2N \frac{\partial^2}{\partial v \partial v^*} + \frac{\partial}{\partial v} \left[2 \frac{\partial^2}{\partial v \partial v^*} + 2 \exp\left[\frac{\partial}{\partial I}\right] - 1 \right] v + \\ &+ \frac{\partial}{\partial v^*} \left[2 \frac{\partial^2}{\partial v \partial v^*} + 2 \exp\left[\frac{\partial}{\partial I}\right] - 1 \right] v^* + \\ &\left. + 2 \left[\left(\exp\left[\frac{\partial}{\partial I}\right] - 1 \right) - \exp\left[-\frac{\partial}{\partial I}\right] \frac{\partial^4}{\partial v^2 \partial v^{*2}} \right] I \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\gamma_{12}}{2} \left\{ N \left(\exp \left[-\frac{\partial}{\partial I} \right] - 1 \right) + \frac{\partial}{\partial v} v + \frac{\partial}{\partial v^*} v^* - 2 \left(\exp \left[-\frac{\partial}{\partial I} \right] - 1 \right) I \right\} + \\
 & + \frac{\eta}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} v + \frac{\partial}{\partial v^*} v^* - 2 \frac{\partial^2}{\partial v \partial v^*} \exp \left[-\frac{\partial}{\partial I} \right] I + \right. \\
 & \quad \left. + N \frac{\partial^2}{\partial v \partial v^*} \exp \left[-\frac{\partial}{\partial I} \right] \right\}, \quad (2.62)
 \end{aligned}$$

$$L_L = \kappa \left[\frac{\partial}{\partial u} u + \frac{\partial}{\partial u^*} u^* \right] + 2\kappa n_{\text{тепл}} \frac{\partial^2}{\partial u \partial u^*}. \quad (2.63)$$

Уравнение (2.60) имеет все еще слишком сложную структуру. Приближенные формы этого уравнения уже получались, как отмечалось во введении, полуклассическими методами и будут обсуждаться далее в разд. 3в.

Если известны функции Грина

$$P(u_2, u_2^*, v_2, v_2^*, I_2, t_2; u_1, u_1^*, v_1, v_1^*, I_1, t_1) \equiv P(2, 1), \quad (2.64)$$

которые определяются как решения уравнения

$$\begin{aligned}
 & \frac{dP(2, 1)}{dt_2} - L_2 P(2, 1) = \\
 & = \delta(t_2 - t_1) \delta^{(2)}(u_2 - u_1) \delta^{(2)}(v_2 - v_1) \delta(I_2 - I_1), \quad (2.65)
 \end{aligned}$$

то мы можем вычислить все квантовомеханические многовременные корреляционные функции упорядоченных по времени и нормированных полевых операторов с помощью следующей формулы [40]:

$$\begin{aligned}
 & \langle b^\dagger(t_1)^{\nu_1} \dots b^\dagger(t_n)^{\nu_n} b(t_n)^{\mu_n} \dots b(t_1)^{\mu_1} \rangle = \\
 & = \int \dots \int \beta_n^{*\nu_n} \beta_n^{\mu_n} \dots \beta_1^{*\nu_1} \beta_1^{\mu_1} \prod_{\mu=1}^n P(\mu; \mu-1) dV_1 \dots dV_n, \quad (2.66)
 \end{aligned}$$

где

$$dV_l = du_l du_l^* dv_l dv_l^* dI_l.$$

Хотя корреляционная функция в (2.66) является полностью квантовомеханической, в правой части (2.66) содержатся только такие выражения, которые вычисляются с помощью c -численных операций.

§ 3а. Решение ланжевеновских уравнений

3а.1. Точное исключение атомных переменных. Однородно и неоднородно уширенная линия. Мы исходим из уравнений (2.20) — (2.22). Формальное решение уравнения (2.21) имеет вид

$$\alpha_{\mu}^{\dagger} = \frac{1}{\hat{\nu}} \left\{ -i \sum_{\lambda'} g_{\mu\lambda'} b_{\lambda'}^{\dagger} \sigma_{\mu} + \Gamma_{21, \mu} \right\}, \quad (3а.1)$$

где

$$\hat{\nu} = \nu - i\epsilon_{\mu} + \frac{d}{dt}. \quad (3а.2)$$

Подставляя (3а.1) в (2.22), находим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{T_p} \right) \sigma_{\mu} = \\ & = \frac{d_0}{T_p} + \Delta\Gamma_{\mu} + 2i \sum_{\lambda''} \left\{ g_{\mu\lambda''} b_{\lambda''}^{\dagger} \frac{1}{\hat{\nu}^*} \Gamma_{21, \mu}^{\dagger} - g_{\mu\lambda''}^* b_{\lambda''} \frac{1}{\hat{\nu}} \Gamma_{21, \mu} \right\} + \\ & + \left\{ -2 \sum_{\lambda'', \lambda'} g_{\mu\lambda''} b_{\lambda''}^{\dagger} \frac{1}{\hat{\nu}^*} g_{\mu\lambda'}^* b_{\lambda'} - 2 \sum_{\lambda'', \lambda'} g_{\mu\lambda''}^* b_{\lambda''} \frac{1}{\hat{\nu}} g_{\mu\lambda'} b_{\lambda'}^{\dagger} \right\} \sigma_{\mu}. \end{aligned} \quad (3а.3)$$

Из этого уравнения мы определяем σ_{μ} точно:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu} & = \left[\hat{\nu}_p + 2 \left\{ \sum_{\lambda'', \lambda'} g_{\mu\lambda''} b_{\lambda''}^{\dagger} \frac{1}{\hat{\nu}^*} g_{\mu\lambda'}^* b_{\lambda'} + g_{\mu\lambda''}^* b_{\lambda''} \frac{1}{\hat{\nu}} g_{\mu\lambda'} b_{\lambda'}^{\dagger} \right\} \right]^{-1} \times \\ & \times \left[\frac{d_0}{T_p} + \Delta\Gamma_{\mu} + 2i \sum_{\lambda''} \left\{ g_{\mu\lambda''} b_{\lambda''}^{\dagger} \frac{1}{\hat{\nu}^*} \Gamma_{21, \mu}^{\dagger} - g_{\mu\lambda''}^* b_{\lambda''} \frac{1}{\hat{\nu}} \Gamma_{21, \mu} \right\} \right], \end{aligned} \quad (3а.4)$$

где

$$\hat{\nu}_p = \frac{1}{T_p} + \frac{d}{dt}. \quad (3а.5)$$

С другой стороны, подставляя (3а.1) в (2.20), мы находим уравнение

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} - i\omega_{\lambda} + \kappa_{\lambda} \right) b_{\lambda}^{\dagger} = \\ & = \sum_{\mu, \lambda'} g_{\mu\lambda}^* \frac{1}{\hat{\nu}} g_{\mu\lambda'} b_{\lambda'}^{\dagger} \sigma_{\mu} + i \sum_{\mu} g_{\mu\lambda}^* \frac{1}{\hat{\nu}} \Gamma_{21, \mu} + F_{\lambda} \end{aligned} \quad (3а.6)$$

для полевых операторов b_{λ}^{\dagger} . В этих уравнениях операторы σ_{μ} определены точным выражением (3а.4), так что (3а.6) есть уравнение только для одних полевых операторов. Из-за присутствия полевых операторов в знаменателе σ_{μ} эти уравнения являются существенно нелинейными и обладают очень сложной структурой. Мы покажем, однако, что в некоторых случаях эти уравнения могут быть решены либо точно, либо в очень хорошем приближении.

За. 2. Вывод уравнения Ван дер Поля для многомодовой генерации.

а) *Общая процедура.* Точная форма уравнения для полевых операторов позволяет нам использовать подходящие аппроксимации. Для не слишком больших чисел фотонов мы можем допустить выполнение неравенства

$$\frac{n |g|^2}{\nu} < \frac{1}{T_p}. \quad (3а.7)$$

Используем теперь операторную теорему

$$\frac{1}{A+B} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} \dots \quad (3а.8)$$

и с ее помощью запишем знаменатель (3а.4) в виде

$$\frac{1}{d/dt + 1/T_p + 2\{\dots\}} = \frac{1}{d/dt + 1/T_p} - \frac{1}{d/dt + 1/T_p} \cdot 2\{\dots\} \frac{1}{d/dt + 1/T_p}, \quad (3а.9)$$

где мы ограничились первыми двумя членами. Величина B определяется выражением

$$B = 2 \sum_{\lambda' \lambda''} \left(g_{\mu\lambda'} b_{\lambda''}^{\dagger} \frac{1}{\nu^*} g_{\mu\lambda}^* b_{\lambda} + g_{\mu\lambda'}^* b_{\lambda''} \frac{1}{\nu} g_{\mu\lambda} b_{\lambda'}^{\dagger} \right). \quad (3а.10)$$

Для вычисления σ_{μ} [уравнение (3а.4)] применим правую часть уравнения (3а.9) к d_0/T_p и найдем

$$\sigma_{\mu} \approx d_0 - \frac{1}{d/dt + 1/T_p} 2\{\dots\}. \quad (3а.11)$$

Как можно показать при детальном анализе, другие члены в (3а.4) являются членами более высокого

порядка малости (т. е. меньше по крайней мере на множитель bg/γ) и поэтому здесь отброшены. Подставляя σ_μ из (3а.11) в полевое уравнение (3а.6), получаем

$$\left(\frac{d}{dt} - i\omega_\lambda + \kappa_\lambda\right) b_\lambda^\dagger = A_\lambda + i \sum_\mu g_{\mu\lambda}^* \frac{1}{\gamma - i\epsilon_\mu + d/dt} \Gamma_{21,\mu} + \Gamma_\lambda, \quad (3а.12)$$

где

$$A_\lambda = \sum_{\mu\lambda'} g_{\mu\lambda}^* \frac{1}{\gamma - i\epsilon_\mu + d/dt} g_{\mu\lambda'} b_{\lambda'}^\dagger \times \\ \times \left[d_0 - \frac{1}{d/dt + 1/T_p} 2 \sum_{\lambda'', \lambda'''} \left(g_{\mu\lambda''} b_{\lambda''}^\dagger \frac{1}{\gamma + i\epsilon_\mu + d/dt} g_{\mu\lambda'''}^* b_{\lambda'''} + \right. \right. \\ \left. \left. + \text{компл. сопр.} \right) \right]. \quad (3а.13)$$

При дальнейшем рассмотрении нужно различать случай неподвижных атомов (твердотельный лазер, $v_\mu \equiv 0$) и случай движущихся атомов (газовый лазер).

б) *Твердотельный лазер.* Чтобы учесть среднюю временную зависимость в b_λ^\dagger , введем обозначение

$$b_\lambda^\dagger = \exp[i\Omega_\lambda t] \tilde{b}_\lambda^\dagger(t), \quad (3а.14)$$

где Ω_λ — частота моды нагруженного резонатора. Используем далее *адиабатическое приближение*, полагая, что остающиеся в $\tilde{b}_\lambda^\dagger(t)$ частоты малы по сравнению с γ и $1/T_p$ или, другими словами, мы пренебрегаем оператором d/dt по сравнению с γ и $1/T_p$; тогда A_λ принимает форму

$$A_\lambda = \sum_{\mu, \lambda'} g_{\mu\lambda}^* g_{\mu\lambda'} d_0 \exp[i\Omega_\lambda t] \frac{1}{\gamma - i(\epsilon_\mu - \Omega_{\lambda'})} \tilde{b}_{\lambda'}^\dagger - \\ - 2 \sum_{\mu\lambda'', \lambda''\lambda'''} d_0 g_{\mu\lambda}^* g_{\mu\lambda''} g_{\mu\lambda'''}^* g_{\mu\lambda''''} \exp[i(\Omega_{\lambda''} + \Omega_{\lambda'''} - \Omega_{\lambda''''})t] \times \\ \times \tilde{b}_{\lambda''}^\dagger \tilde{b}_{\lambda'''}^\dagger \tilde{b}_{\lambda''''} \frac{1}{\gamma - i\epsilon_\mu + i(\Omega_{\lambda''} + \Omega_{\lambda'''} - \Omega_{\lambda''''})} \frac{1}{1/T_p + i(\Omega_{\lambda''} - \Omega_{\lambda''''})} \times \\ \times \left[\frac{1}{\gamma + i(\epsilon_\mu - \Omega_{\lambda''''})} + \frac{1}{\gamma - i(\epsilon_\mu - \Omega_{\lambda''})} \right]. \quad (3а.15)$$

Полный набор уравнений примет вид

$$\left[\frac{d}{dt} + i(\Omega_\lambda - \omega_\lambda) + \kappa_\lambda \right] \tilde{b}_\lambda^+ = \\ = \exp[-i\Omega_\lambda t] \left\{ A_\lambda + i \sum_\mu g_{\mu\lambda}^* \frac{1}{\gamma - i\epsilon_\mu + d/dt} \Gamma_{21, \mu} + \tilde{F}_\lambda \right\}. \quad (3a.16)$$

Выражения для A_λ в уравнениях (3a.16) идентичны прежним выражениям Хакена и Зауермана [11], полученным с помощью итерационной процедуры. Уравнения (3a.16) можно рассматривать в качестве основных уравнений многомодовой лазерной генерации с учетом шума. С их помощью можно учесть эффект влияния шума, например, на частотную синхронизацию [6].

3a.3. *Уравнение Ван дер Поля для одномодовой генерации.* Ограничим, опуская в (3a.16) и (3a.15) индекс λ , наше рассмотрение одномодовым случаем. Положим далее

$$\tilde{F}_{\text{полн}} = F_{\text{полн}} \exp[i\Omega t]. \quad (3a.17)$$

Тогда уравнение (3a.16) принимает форму

$$\left[\frac{d}{dt} + i(\Omega - \omega) + \kappa - C \right] \tilde{b}^+ + \beta \tilde{b}^+ \tilde{b} \tilde{b}^+ = F_{\text{полн}}, \quad (3a.18)$$

которая, как будет далее показано, справедлива как для твердотельного, так и для газового лазера. Однако явный вид коэффициентов C , β и $F_{\text{полн}}$ в этих случаях различен. (Последующая часть разд. 3a.3 не является необходимой для понимания дальнейшего и может быть опущена.)

а) *Твердотельный лазер.* В этом случае коэффициенты имеют вид

$$C = \sum_\mu |g_\mu|^2 d_0 \frac{1}{\gamma - i(\epsilon_\mu - \Omega)}, \quad (3a.19)$$

$$\beta = 2 \sum_\mu d_0 |g_\mu|^4 \frac{1}{\gamma - i(\epsilon_\mu - \Omega)} T_p \frac{2\gamma}{\gamma^2 + (\epsilon_\mu - \Omega)^2}, \quad (3a.20)$$

$$F_{\text{полн}} = \exp[-i\Omega t] \left\{ i \sum_\mu g_\mu^* \frac{1}{\gamma - i\epsilon_\mu + d/dt} \Gamma_{21, \mu} + F \right\} \quad (3a.21)$$

[ср. (3а.16) и определение A_λ (3а.15)]. Точный вид коэффициентов C и β вычислялся в лекциях предыдущей Летней школы в 1963 г.

β) Газовый лазер. Мы будем исходить из выражения (3а.13), в котором прежде всего вычислим член

$$\sum_{\mu} g_{\mu\lambda}^* \frac{d_0}{\gamma - i\epsilon_0 + d/dt} g_{\mu\lambda} b^\dagger = C b^\dagger. \quad (3а.22)$$

Используя явный вид $g_{\mu\lambda}$ из (1.10а) и выражение (3а.14) и предполагая, что входящие в b^\dagger частоты малы по сравнению с γ , находим

$$C = \sum_{\mu} d_0 \frac{|G|^2}{4} \cos^2 \theta_{\mu} \left\{ \frac{1}{\gamma - i(\epsilon_0 - \Omega - kv_{\mu})} + \frac{1}{\gamma - i(\epsilon_0 - \Omega + kv_{\mu})} \right\}. \quad (3а.23)$$

Здесь было использовано соотношение

$$\sum_{\mu} \exp[2ikx_{\mu}] = 0. \quad (3а.24)$$

Следующий член в квадратных скобках в A_λ можно вычислить точно таким же способом, так что в результате получим

$$A = C b^\dagger - \beta b^\dagger b b^\dagger, \quad (3а.25)$$

где

$$\beta = -\{L_+ + L_- + M_+ + M_-\}.$$

Здесь

$$L_{\pm} = i \sum_{\mu} \cos^4 \theta_{\mu} \cdot \gamma T_p d_0 \frac{|G|^4}{4} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{(\Omega - \epsilon_0 + \epsilon)^2 + \gamma^2} + \frac{1}{(\Omega - \epsilon_0 - \epsilon)^2 + \gamma^2} \right\} \frac{1}{\Omega - \epsilon_0 \pm \epsilon + i\gamma}, \quad (3а.26)$$

$$M_{\pm} = i \sum_{\mu} \frac{d_0 (\gamma \pm i\epsilon) \cos^4 \theta_{\mu} |G|^4}{4(1/T_p \pm 2i\epsilon)} \times \\ \times \frac{1}{[(\Omega - \epsilon_0)^2 - (\epsilon \mp i\gamma)^2][\Omega - \epsilon_0 - i\gamma \pm \epsilon]} \quad (3а.27)$$

и $\epsilon = kv_{\mu}$.

Эти величины были вычислены Хакеном и Заурманом [11] для максвелловского распределения скоростей.

Однако для наших целей их явный вид не существует. Величина $F_{\text{полн}}$ имеет тот же самый вид (3а.21), что и для твердотельного лазера.

За. 4. Качественное рассмотрение: уравнение Ван дер Поля. Предположим существование точного резонанса $\Omega = \omega$ и пренебрежем на время флуктуационной силой $F_{\text{полн}}$.

Введем ненасыщенное суммарное усиление G с помощью соотношения

$$G = C - \kappa, \quad (3а.28)$$

так что уравнение (3а.18) принимает вид

$$\left\{ \frac{d}{dt} + G \right\} \tilde{b} + \beta \tilde{b}^+ \tilde{b} \tilde{b}^+ = 0. \quad (3а.29)$$

Чтобы выявить зависимость G от инверсии d_0 , положим $C = (d_0/d_c)\kappa$, где d_c — инверсия на пороге, т. е. в отсутствие усиления

$$G = \kappa \left(\frac{d_0}{d_c} - 1 \right). \quad (3а.30)$$

Общее решение уравнения (3а.29) запишется тогда следующим образом:

$$\tilde{b}^+ = \frac{C}{\sqrt{2\beta}} \left\{ \exp[-2Gt] \left(1 - \frac{|C|^2}{2G} \right) + \frac{|C|^2}{2G} \right\}^{-1/2}. \quad (3а.31)$$

Это решение ведет себя совершенно по-разному в зависимости от знака G .

Ниже порога: $G < 0$ или $d_0 < d_c$. Пусть в момент времени $t = 0$ шумовые флуктуации создали поле с амплитудой \tilde{b}^+ , равной $C/\sqrt{2\beta}$. При временах $t \geq 1/G$ решение (3а.31) имеет вид

$$\tilde{b}^+ = \frac{C}{\sqrt{2\beta}} \left(1 - \frac{|C|^2}{2G} \right)^{-1/2} \exp[-|G|t], \quad (3а.32)$$

т. е. стремится к нулю.

Выше порога: $G > 0$ или $d_0 > d_c$. Для этого же начального условия находим

$$b^+ = \frac{C}{|C|} \sqrt{\frac{G}{\beta}} \left\{ 1 + \exp[-2Gt] \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2G}{|C|^2} \right) \right\}, \quad (3а.33)$$

т. е. амплитуда поля стремится к неисчезающему стационарному значению.

За. 5. *Потенциальная модель.* Исходя из (За. 16) мы можем найти более наглядное физическое описание. Предположим снова, что существует только одна мода, линия однородно уширена, так что $\epsilon_\mu = \epsilon_0$, и выполняется условие точного резонанса

$$\Omega = \omega = \epsilon_0. \quad (3a.34)$$

Умножая (За. 16) на

$$\exp[-i\Omega t] \left(\gamma - i\epsilon_0 + \frac{d}{dt} \right) \exp[i\Omega t] \equiv \gamma + \frac{d}{dt}, \quad (3a.35)$$

находим

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \tilde{b}^+ + (\kappa + \gamma) \frac{d}{dt} \tilde{b}^+ + \kappa\gamma \left(1 - \frac{d_0}{d_c} \right) \tilde{b}^+ + \\ + \gamma\beta \tilde{b}^+ \tilde{b}^+ = K(t). \end{aligned} \quad (3a.36)$$

В членах, содержащих $d_0 b^+$ и $\gamma\beta \tilde{b}^+ \tilde{b}^+$, мы пренебрегли оператором d/dt по сравнению с γ (это является прекрасным приближением в областях, не слишком удаленных вверх от порога). Функция $K(t)$ определяется выражением

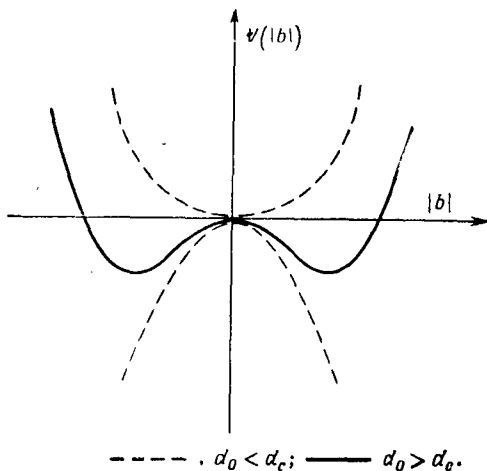
$$K(t) = \exp[-i\Omega t] \left\{ i \sum_{\mu} g_{\mu\lambda}^* \Gamma_{21, \mu} + \left(\gamma - i\epsilon_0 + \frac{d}{dt} \right) F \right\}. \quad (3a.37)$$

Уравнение (За. 36) можно интерпретировать как два вещественных уравнения для «частицы» с вещественными координатами $x(t)$ и $y(t)$, так что $\tilde{b}^+ = x + iy$. Эта «частица» движется в потенциале

$$V(|b|) = \kappa\gamma \left(1 - \frac{d_0}{d_c} \right) \frac{|\tilde{b}|^2}{2} + \frac{\gamma\beta}{4} |\tilde{b}|^4. \quad (3a.38)$$

а) *Допороговая область.* Малым значениям инверсии $d_0 < d_c$ соответствует верхняя пунктирная кривая фиг. 4. Поскольку \tilde{b}^+ стремится к нулю после каждого «возбуждения» от «соударения», то следует ожидать малых значений $|b|$, так что членом третьего порядка в (За. 36) можно пренебречь. Это предположение *линеа-*

ризует уравнение (За. 36), и в такой форме оно справедливо в области усиления. Уравнение (За. 36) становится тогда уравнением затухающего гармонического осциллятора, находящегося под действием случайной силы $K(t)$. Эту случайную силу можно интерпретировать в том смысле, что она действует в случайные моменты времени. После каждого такого возбуждения



Фиг. 4.

«частица падает на дно потенциальной кривой» (ср. фиг. 4). При увеличении инверсии d_0 величина $(1 - d_0/d_c)$ уменьшается (ср. фиг. 4), так что частица стремится к дну потенциальной кривой более медленно. Переводя это утверждение на волновой язык, можно сказать, что связанная с флуктуациями частота модуляции уменьшается, что приводит к сужению линии. Импульсы $K(t)$ обусловлены статистически независимыми событиями. Рассмотрим, например, оператор Γ_{21} , равный сумме атомных шумовых операторов $\Gamma_{21, \mu}$. Каждый из операторов связан с флуктуациями атомного дипольного момента, которые действительно статистически независимы. Как мы позднее покажем точно, оператор Γ_{21} ответствен за шум спонтанного излучения, тогда как оператор F связан с тепловым шумом стенок и

вакуумными флуктуациями. Каждый процесс излучения вносит вклад в b^\dagger . Вследствие пологого характера кривой амплитуда спадает более медленно или, другими словами, потери частично компенсируются вынужденным излучением. Поскольку полная амплитуда b^\dagger представляет собой сумму многих статистических вкладов, то вероятность W обнаружения определенного значения b^\dagger является гауссовой функцией:

$$W(b) = \text{const} \cdot \exp \left[-\frac{|b|^2}{|b_0|^2} \right]. \quad (3a.39)$$

Когда d_0 становится столь велико, что $(1 - d_0/d_c) < 0$, то *кажется*, что система становится неустойчивой (см. нижнюю пунктирную кривую на фиг. 4). В линейных теориях величина d_0 никогда не может стать больше d_c , так как в противном случае пропорциональная $|b|^2$ энергия излучения стала бы бесконечной. Подобные рассуждения, однако, не верны, поскольку они полностью игнорируют нелинейность.

б) *Область на пороге и выше порога.* При $(1 - d_0/d_c) < 0$ амплитуда осциллирует вокруг нового стационарного значения $r_0 \neq 0$. Поскольку потенциал обладает вращательной симметрией, то возвращающие тангенциальные силы отсутствуют. Таким образом, под действием случайной силы $K(t)$ фаза испытывает процесс диффузии.

Запишем

$$b^\dagger = \exp[i\varphi(t)](r_0 + \rho(t)) \quad (3a.40)$$

и обсудим процесс диффузии фазы и амплитудные флуктуации более детально.

а) *Диффузия фазы.* С увеличением d_0 стационарное значение амплитуды r_0 возрастает. Поэтому увеличиваются путь частицы и ее миграция во времени. Поскольку при диффузионном процессе $\Delta x^2 \sim t$ и для тангенциального движения $\Delta x = r_0 \Delta \varphi$, то отсюда следует

$$\overline{(\Delta \varphi)^2} \sim \frac{t}{r_0^2}. \quad (3a.41)$$

Множитель перед t есть не что иное, как ширина линии. С увеличением инверсии связанная с диффузией фазы ширина линии $\Delta\nu$ падает как $1/r_0^2$ или, поскольку для когерентного излучения мощность P равна $\hbar\omega 2\chi r_0^2$,

$$\Delta\nu \sim \frac{1}{P}. \quad (3a.42)$$

β) *Флуктуации амплитуды (интенсивности)*. С увеличением r_0 наклон потенциальной кривой в окрестности r_0 становится круче. Поэтому

α') частота осцилляций возрастает, так что время релаксации амплитудных флуктуаций τ уменьшается

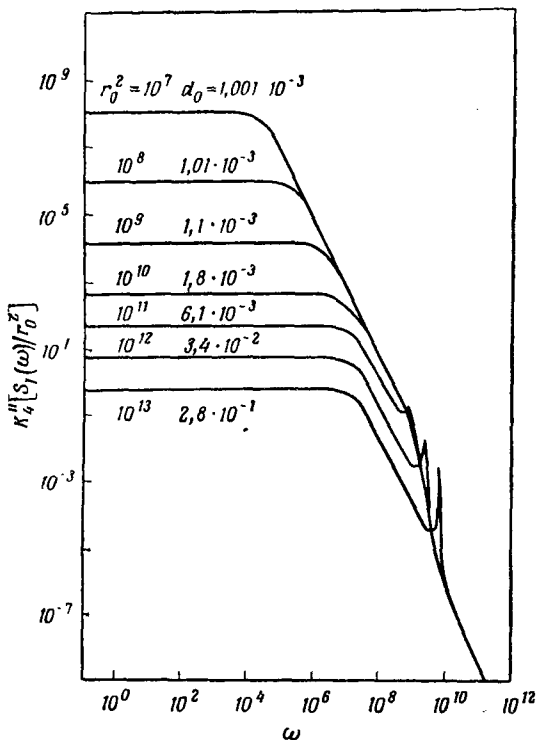
$$\tau \sim \frac{1}{P}, \quad (3a.43)$$

β') флуктуационная часть ρ амплитуды уменьшается

$$\langle \rho^2 \rangle \sim \frac{1}{P}. \quad (3a.44)$$

За. 6. Количественное рассмотрение; квантовомеханическая квазилинеаризация. Как было показано выше, в области ниже порога лазерные уравнения могут быть линейаризованы и их можно рассматривать с помощью стандартных методов. Далее мы обсудим нелинейную область.

Наше предыдущее рассмотрение наводит на мысль, что решение вида (3a.40) применимо также и в квантовомеханическом случае в области несколько выше и гораздо выше порога, если некоторые из величин этого решения, в частности φ и ρ , считать квантовомеханическими операторами. Важнее всего отметить тот факт, что r_0 остается c -числом, поскольку в области *выше порога возникает классическое когерентное состояние*. Можно показать, что в шредингеровском представлении такое состояние действительно соответствует глауберову состоянию (с флуктуирующей фазой). Дальнейшее рассмотрение показывает, что выше порога величина $\langle \rho^2 \rangle$ мала по сравнению с r_0^2 и что $\langle (\varphi(t) - \varphi(0))^2 \rangle$ является медленно меняющейся функцией. Таким образом, приближение Лэмба, Хакена и Зауермана, Грасюка и

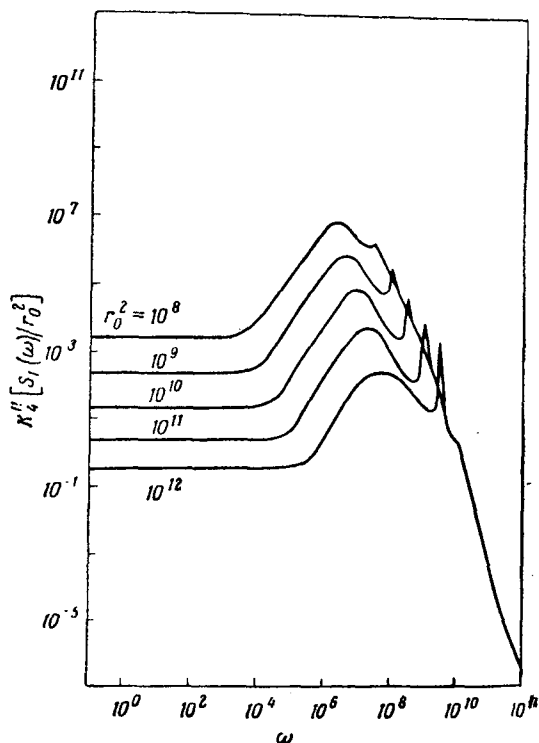


Фиг. 5. Спектральная плотность флуктуаций интенсивности в газовом лазере (неоднородное уширение).

Ораевского (см. введение), которые рассматривали амплитуду поля как классическую переменную, может быть полностью оправдано. Поскольку ниже порога $r_0 = 0$ и $\langle \rho \rangle = 0$, то в соответствии с только что упомянутыми теориями «когерентное» излучение ниже порога отсутствует.

Подставим выражение (3а.40) в уравнение (3а.18) и линеаризуем его относительно φ и ρ . При точном резонансе это приводит к двум не связанным между собой уравнениям для φ и ρ : уравнению

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{r_0} \text{Im} \{ \exp[-i\varphi] \tilde{F}_{\text{полн}} \}, \quad (3а.45)$$



Фиг. 6. Спектральная плотность флуктуаций интенсивности в рубиновом лазере при 10 К (однородное уширение).

причем это уравнение легко решается, так как фазовый множитель в правой части можно включить в случайные фазы флуктуационной силы $F_{\text{полн}}$, и уравнению

$$\dot{\rho} + 2G\rho = \text{Re} \{ \exp[-i\varphi] \tilde{F}_{\text{полн}} \} \quad (3a.46)$$

с решением

$$\rho = \int_0^t \exp[-2G(t-\tau)] \text{Re} \{ \exp[-i\varphi] \tilde{F}_{\text{полн}} \}_\tau d\tau. \quad (3a.47)$$

Чтобы выяснить связь с экспериментом, покажем теперь, как с помощью выражений (3a.45) и (3a.47) можно вычислять измеряемые величины. Рассмотрим

корреляционную функцию интенсивности $K(\tau)$, которая измерялась в эксперименте Хэнбери Брауна — Твисса (ср. с подробными лекциями Ареки, Глаубера и Хауса в этой школе ¹⁾). Функция $K(\tau)$ определяется выражением

$$K(\tau) = \langle b^\dagger(t) b^\dagger(t+\tau) b(t+\tau) b(t) \rangle - \langle b^\dagger b \rangle \langle b^\dagger b \rangle. \quad (3a.48)$$

Подставляя (3a.40) в (3a.48) и удерживая только член низшего порядка по ρ , получаем для (3a.48) выражение

$$4r_0^2 \langle \rho(t) \rho(t+\tau) \rangle. \quad (3a.49)$$

Чтобы показать на конкретном примере, как можно точно вычислить выражение (3a.49), используем формулу (3a.47) в области применимости уравнения Ван дер Поля.

Для далеких надпороговых областей, т. е. при $|bg| \gtrsim 1/T_p (\equiv \gamma_{||})$, уравнение Ван дер Поля перестает быть справедливым, поскольку в полевом уравнении возникают производные высших порядков. Эти случаи также можно рассматривать с помощью процедуры квазилинеаризации (случай однородно уширенной линии рассмотрен в работе [5]; случай неоднородно уширенной линии и газового лазера — в неопубликованной работе Арцта и др.).

Типичные результаты приведены на фиг. 5 и 6. Отметим, что пики амплитудных флуктуаций на частотах $\omega \neq 0$ нельзя объяснить с помощью уравнения Ван дер Поля. После этого замечания мы снова вернемся к вычислению выражения (3a.49) с помощью уравнения Ван дер Поля.

Поскольку ρ зависит от флуктуационной силы интегрально, то проблема вычисления (3a.49) сводится к вычислению корреляционной функции шумового источника

$$I = \langle F_{\text{полн}}(t) F_{\text{полн}}(t') \rangle. \quad (3a.50)$$

¹⁾ В книге Quantum Optics, New York, 1969. Перевод лекций Ареки см. в настоящем сборнике. Перевод лекций Глаубера см. в сборнике «Когерентные состояния в квантовой теории», изд-во «Мир», 1972. — Прим. ред.

Используя (2.13), (2.14) и (2.19), находим

$$I = \left\{ \sum_{\mu} (g_{21, 12, \mu} + g_{12, 21, \mu}) \times \right. \\ \left. \times |g_{\mu}|^2 \frac{1}{2\gamma} \exp[-\gamma(t-t') + i(\epsilon_{\mu} - \Omega)(t-t')] \right\} + \\ + \kappa \left(n_{\text{тепл}} + \frac{1}{2} \right) \delta(t-t'). \quad (3a.51)$$

Так как в выражение (3a.51) входят интегралы, которые содержат малые по сравнению с γ частоты, то его можно упростить:

$$\left\{ \sum_{\mu} (g_{21, 12, \mu} + g_{12, 21, \mu}) |g_{\mu}|^2 \frac{1}{\gamma^2 + (\epsilon_{\mu} - \Omega)^2} + \right. \\ \left. + \kappa(2n_{\text{тепл}} + 1) \right\} \delta(t-t'). \quad (3a.52)$$

Используя (2.15), получаем

$$g_{21, 12} + g_{12, 21} = 2\gamma(\rho_{22} + \rho_{11})_{\mu}. \quad (3a.53)$$

Определив среднее значение

$$\overline{N_2 + N_1} = \frac{\sum_{\mu} |g_{\mu}|^2 [1/(\gamma^2 + (\epsilon_{\mu} - \Omega)^2)] (N_2 + N_1)_{\mu}}{\sum_{\mu} |g_{\mu}|^2 [1/(\gamma^2 + (\epsilon_{\mu} - \Omega)^2)]}, \quad (3a.54)$$

мы с помощью (3a.52), (3a.53) и (3a.54) находим

$$I = 2\kappa \left\{ \frac{\overline{N_2 + N_1}}{(N_2 - N_1)_{\text{пор}}} + 2n_{\text{тепл}} + 1 \right\} \delta(t-t'). \quad (3a.55)$$

Поскольку в области применимости уравнения Ван дер Поля разность между насыщенными и пороговыми числами заполнения мала, можно заменить

$$\overline{N_2 + N_1} \text{ на } (N_2 + N_1)_{\text{пор}}.$$

Подставляя выражение (3a.55) в (3a.49), в окончательном виде получаем

$$K(\tau) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(N_2 + N_1)_{\text{пор}}}{(N_2 - N_1)_{\text{пор}}} + 2n_{\text{тепл}} + 1 \right\} \frac{\kappa}{\beta} \exp[-2\beta r_0^2 \tau]. \quad (3a.56)$$

Таким образом, мы видим, что амплитудная корреляционная функция $\langle \rho(t)\rho(t+\tau) \rangle$ уменьшается как $1/r_0^2$, т. е. обратно пропорционально мощности излучения. С другой стороны, ширина линии амплитудных флуктуаций $\Delta\omega_a = 2\beta r_0^2$ при увеличении мощности излучения возрастает пропорционально r_0^2 . Оба эти предсказания были подтверждены экспериментально в области несколько выше порога генерации [49, 50, 53].

Метод квазилинеаризации становится применимым начиная с фотонных чисел, которые более чем в 10 раз превышают число фотонов на пороге. Для более близкой к порогу области нужно применять другие методы (см. разд. 3б и 3в).

Другой представляющий интерес величиной является спектральная ширина линии $\Delta\omega$, которая служит мерой *фазовых флуктуаций*. С помощью корреляционной функции $\langle b^\dagger(t)b(0) \rangle$ и «расщепленной» формы записи (3а.40) для амплитуды b^\dagger мы находим для главного члена выражение ¹⁾

$$r_0^2 \langle \exp[i\varphi(t)] \exp[-i\varphi(0)] \rangle. \quad (3а.57)$$

Детальный анализ показывает, что (3а.57) можно записать в виде

$$r_0^2 \exp[-\Delta\omega t], \quad (3а.58)$$

где

$$\Delta\omega = \frac{1}{2} \langle (\varphi(t) - \varphi(0))^2 \rangle. \quad (3а.59)$$

Подставляя решение уравнения (3а.45) в (3а.59) и используя формулы (3а.50) — (3а.55), получаем

$$\Delta\omega = \frac{\hbar\omega\kappa^2}{2P} \left\{ \frac{(N_2 + N_1)}{(N_2 - N_1)_{\text{пор}}} + 2n_{\text{тепл}} + 1 \right\}, \quad (8а.60)$$

где $P = 2\kappa\hbar\omega r_0^2$.

Таким образом, ширина линии должна уменьшиться обратно пропорционально мощности излучения.

¹⁾ См. примечание на стр. 141. — *Прим. ред.*

§ 36. Непосредственное решение управляющего уравнения

В то время как уравнение Фоккера — Планка или его обобщенная форма (2.60) для функции распределения являются s -численными дифференциальными «уравнениями» в частных производных, управляющее уравнение для матрицы плотности ρ представляет собой операторное уравнение, в котором содержится полная микроскопическая информация. Оно может быть решено более или менее точно в зависимости от того или иного приближения для матрицы плотности ρ . Простейшее приближение, которое использовалось в первых работах по теории лазера, называется приближением самосогласованного поля (ПСП). Это приближение состоит в факторизации ρ на произведение одноатомных матриц плотности и матрицы плотности поля. Оказывается, однако, что ПСП не в состоянии описать влияние атомных квантовых флуктуаций на поле. Как было указано во введении, управляющее уравнение рассматривалось более общим способом в представлении чисел заполнения или в глауберовом представлении после адиабатического исключения атомных переменных. В нашем приближении для ρ отдельный атом в отличие от ПСП связан с полем наиболее общим способом, но при этом предполагается, что все атомы связаны с полем симметрично. Прежде чем выписывать такое приближение, мы должны записать управляющее уравнение (2.39) в представлении когерентных состояний для матрицы ρ :

$$\rho = \int \frac{d^2\beta}{\pi} |\beta\rangle \omega(\beta, \beta^*, \dots) \langle\beta|. \quad (36.1)$$

Здесь $\omega(\beta, \beta^*, \dots)$ является s -численной функцией β и β^* , но относительно атомных переменных это все еще оператор. В настоящее время хорошо известно [24], что функция $\omega(\beta, \beta^*, \dots)$ может быть найдена из оператора $\rho(b, b^\dagger, \dots)$ следующим образом: запишем $\rho(b, b^\dagger, \dots)$, используя коммутационное соотношение $[b, b^\dagger] = 1$, в антинормальном порядке и произведем после этого замену $b \rightarrow \beta$, $b^\dagger \rightarrow \beta^*$. Члены $(\partial\rho/\partial t)_{\text{ког}}$ и $(\partial\rho/\partial t)_{\text{неког}}$ в

управляющем уравнении теперь должны быть переписаны в форме, в которой матрица ρ остается антиупорядоченной при любых временах, если только это условие выполнялось в момент времени $t = 0$. Это означает, что в формуле (36.1) операторы b и b^\dagger должны располагаться соответственно слева и справа. Используя формулы

$$[b, \rho] = \frac{\partial \rho}{\partial b^\dagger}, \quad [b^\dagger, \rho] = -\frac{\partial \rho}{\partial b} \quad (36.2)$$

и производя замену

$$b \rightarrow \beta = \frac{1}{2}(v_1 - iv_2), \quad b^\dagger \rightarrow \beta^* = \frac{1}{2}(v_1 + iv_2), \quad (36.3)$$

получим из (2.39) в обозначениях (2.40) модифицированное, но полностью эквивалентное управляющее уравнение для $\omega(\beta, \beta^*, \dots)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} = & (-i) g \left\{ \frac{v_1}{2} [S^+ + S^-, \omega] - \frac{v_2}{2} [i(S^+ - S^-), \omega] + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \omega}{\partial v_1} S^+ - S^- \frac{\partial \omega}{\partial v_1} \right) - i \left(\frac{\partial \omega}{\partial v_2} S^+ + S^- \frac{\partial \omega}{\partial v_2} \right) \right\} + \\ & + \sum_{\mu} \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)_{A_{\mu}} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)_{L}. \quad (36.4) \end{aligned}$$

Здесь $(\partial \omega / \partial t)_{A_{\mu}}$ имеет тот же самый вид, что и в (2.36) (поскольку в этом выражении нет полевых операторов), и из (2.37) немедленно вытекает

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)_{L} = & \kappa \left(\frac{\partial (v_1 \omega)}{\partial v_1} + \frac{\partial (v_2 \omega)}{\partial v_2} \right) + \\ & + 2\kappa n_{\text{тепл}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial v_1^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v_2^2} \right). \quad (36.5) \end{aligned}$$

Приближение для ω как оператора в атомном пространстве вытекает теперь из того факта, что операторы

$$\begin{aligned} 1_{\mu}, \sigma_{\mu} = & (a_{2\mu}^\dagger a_{2\mu} - a_{1\mu}^\dagger a_{1\mu}), \quad \pi_{\mu} = (\alpha_{\mu}^\dagger + \alpha_{\mu}), \\ \tau_{\mu} = & i(\alpha_{\mu}^\dagger - \alpha_{\mu}) \end{aligned} \quad (36.6)$$

образуют полный набор в «двухуровневом» пространстве одного атома. Следовательно, выражение

$$\rho_v = (C_E(v) 1_v + C_{\sigma}(v) \sigma_v + C_{\pi}(v) \pi_v + C_{\tau}(v) \tau_v) \quad (36.7)$$

является наиболее общей формой записи статистического оператора одного двухуровневого атома, связанного с одной полевой модой. Если теперь предположить, что N атомов в лазере связаны с полем симметрично таким же образом, то для $\omega(v, v^*, \dots)$ отсюда вытекает следующая форма записи:

$$\omega = \prod_{\nu=1}^N \rho_{\nu}, \quad (36.8)$$

где ρ_{ν} определены выражением (36.7).

Сравнивая это приближение с наиболее общей симметричной формой записи ω

$$\begin{aligned} \omega = & f(v) E_E + f_{\sigma}(v) \sum_{\mu} \sigma_{\mu} + f_{\pi}(v) \sum_{\mu} \pi_{\mu} + f_{\tau}(v) \sum_{\mu} \tau_{\mu} + \\ & + f_{\sigma\sigma}(v) \sum_{\mu \neq \nu} \sigma_{\mu} \sigma_{\nu} + f_{\sigma\pi}(v) \sum_{\mu \neq \nu} \sigma_{\mu} \pi_{\nu} + f_{\sigma\tau}(v) \sum_{\mu \neq \nu} \sigma_{\mu} \tau_{\nu} + \\ & + f_{\pi\pi}(v) \sum_{\mu \neq \nu} \pi_{\mu} \pi_{\nu} + \dots, \quad (36.9) \end{aligned}$$

мы получаем для функций $f_E(v)$, $f_{\alpha}(v)$, $f_{\alpha\beta}(v)$, ... ($\alpha, \beta = \sigma, \pi, \tau$) следующие соотношения:

$$\begin{aligned} f_E(v) &= C_E^N(v), \quad f_{\alpha}(v) = C_E^{N-1}(v) C_{\alpha}(v), \\ f_{\alpha\beta}(v) &= C_E^{N-2}(v) C_{\alpha}(v) C_{\beta}(v) = \frac{f_{\alpha}(v) f_{\beta}(v)}{f_E(v)}. \quad (36.10) \end{aligned}$$

Таким образом, функции $f_{\alpha\beta}(v)$, $f_{\alpha\beta\gamma}(v)$, ... более высоких порядков выражаются через функции низших порядков.

Чтобы получить связанные уравнения движения для четырех функций $f_E(v)$, $f_{\alpha}(v)$ ($\alpha = \sigma, \pi, \tau$), рассмотрим выражения со следом, взятым по атомным переменным,

$$\begin{aligned} \text{Sp}_A \omega &= 2^N f_E(v) \equiv F_E(v), \\ \text{Sp}_A \left(\omega \sum_{\mu} \sigma_{\mu} \right) &= N \cdot 2^N f_{\sigma}(v) \equiv N F_{\sigma}(v), \\ \text{Sp}_A \left(\omega \sum_{\mu} \pi_{\mu} \right) &= N \cdot 2^N f_{\pi}(v) \equiv N F_{\pi}(v), \\ \text{Sp}_A \left(\omega \sum_{\mu} \tau_{\mu} \right) &= N \cdot 2^N f_{\tau}(v) \equiv N F_{\tau}(v) \end{aligned} \quad (36.11)$$

и подставим управляющее уравнение (36.4) в dF_E/dt и dF_α/dt . Используя коммутационные соотношения для атомных операторов, мы, после прямых вычислений, получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{dF_E(v)}{dt} = \left(\frac{\partial F_E(v)}{\partial t} \right)_F - gN \left(\frac{\partial F_\tau(v)}{\partial v_1} + \frac{\partial F_\pi(v)}{\partial v_2} \right), \quad (36.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_\sigma(v)}{dt} = & \left(\frac{\partial F_\sigma(v)}{\partial t} \right)_F + \sigma_0 \gamma_{\parallel} F_E(v) - \gamma_{\parallel} F_\sigma(v) - \\ & - g \left\{ v_1 F_\tau(v) - \frac{\partial F_\tau(v)}{\partial v_1} + v_2 F_\pi(v) - \frac{\partial F_\pi(v)}{\partial v_2} \right\} - \\ & - (N-1) g \left\{ \frac{\partial}{\partial v_1} \left(\frac{F_\sigma(v) F_\tau(v)}{F_E(v)} \right) + \frac{\partial}{\partial v_2} \left(\frac{F_\sigma(v) F_\pi(v)}{F_E(v)} \right) \right\}, \quad (36.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_\pi(v)}{dt} = & \left(\frac{\partial F_\pi(v)}{\partial t} \right)_F - \gamma_{\perp} F_\pi(v) + \\ & + g \left\{ v_2 F_\sigma(v) - \frac{\partial F_\sigma(v)}{\partial v_2} - \frac{\partial F_E(v)}{\partial v_2} \right\} - \\ & - (N-1) g \left\{ \frac{\partial}{\partial v_1} \left(\frac{F_\pi(v) F_\tau(v)}{F_E(v)} \right) + \frac{\partial}{\partial v_2} \left(\frac{F_\pi(v) F_\pi(v)}{F_E(v)} \right) \right\}, \quad (36.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_\tau(v)}{dt} = & \left(\frac{\partial F_\tau(v)}{\partial t} \right)_F - \gamma_{\perp} F_\tau(v) + \\ & + g \left\{ v_1 F_\sigma(v) - \frac{\partial F_\sigma(v)}{\partial v_1} - \frac{\partial F_E(v)}{\partial v_1} \right\} - \\ & - (N-1) g \left\{ \frac{\partial}{\partial v_1} \left(\frac{F_\tau(v) F_\tau(v)}{F_E(v)} \right) + \frac{\partial}{\partial v_2} \left(\frac{F_\tau(v) F_\pi(v)}{F_E(v)} \right) \right\}. \quad (36.15) \end{aligned}$$

Эти уравнения совместны со следующей формой функций $F_E(v)$, $F_\alpha(v)$:

$$\begin{aligned} F_E(v) &= G_E(r), & F_\sigma(v) &= G_\sigma(r), \\ F_\pi(v) &= v_2 G(r), & F_\tau(v) &= v_1 G(r), \end{aligned} \quad (36.16)$$

где

$$r^2 = v_1^2 + v_2^2 = 4\beta^* \beta = 4z. \quad (36.17)$$

Система уравнений (36.12) — (36.15) сводится теперь к виду (здесь $G'_j(r) \equiv \partial G_j(r)/\partial r$)

$$\frac{dG_E(r)}{dt} = \kappa(2G_E(r) + rG'_E(r)) + 2\kappa n_{\text{тепл}} \left(G''_E(r) + \frac{1}{r} G'_E(r) \right) - gN(2G(r) + rG'(r)), \quad (36.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{dG_\sigma(r)}{dt} = & \kappa(2G_\sigma(r) + rG'_\sigma(r)) + 2\kappa n_{\text{тепл}} \left(G''_\sigma(r) + \frac{1}{r} G'_\sigma(r) \right) + \\ & + \sigma_0 \gamma_{\parallel} G_E(r) - \gamma_{\parallel} G_\sigma(r) + g(rG'(r) - (r^2 - 2)G(r)) - \\ & - (N - 1)g \left\{ 2 \left(\frac{G_\sigma(r)G(r)}{G_E(r)} \right) + r \left(\frac{G_\sigma(r)G(r)}{G_E(r)} \right)' \right\}, \quad (36.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dG(r)}{dt} = & \kappa(3G(r) + rG'(r)) + 2\kappa n_{\text{тепл}} \left(G''(r) + \frac{3}{r} G'(r) \right) - \\ & - \gamma_{\perp} G(r) + g \left(G_\sigma(r) - \frac{1}{r} G'_\sigma(r) - \frac{1}{r} G'_E(r) \right) - \\ & - (N - 1)g \left\{ 3 \left(\frac{G^2(r)}{G_E(r)} \right) + r \left(\frac{G^2(r)}{G_E(r)} \right)' \right\}. \quad (36.20) \end{aligned}$$

Хотя структура этих уравнений все еще довольно сложна, тем не менее в стационарном случае при

$$\frac{dG_E}{dt} = \frac{dG_\sigma}{dt} = \frac{dG}{dt} = 0$$

их можно, если пренебречь очень малыми поправками, решить точно.

Вследствие чрезвычайной малости величины $n_{\text{тепл}}$ для оптических частот мы можем в очень хорошем приближении пренебречь в (36.18) — (36.20) всеми членами с $\kappa n_{\text{тепл}}$. Тогда уравнение (36.18) будет иметь точное решение

$$G(r) = \frac{\kappa}{gN} G_E(r), \quad (36.21)$$

подставляя которое в (36.19), (36.20), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{N} r(G'_E + G'_\sigma(r)) = & \left(\gamma_{\parallel} - \frac{2\kappa}{N} \right) G_\sigma(r) + \\ & + \left(\frac{\kappa}{N} (r^2 - 2) - \sigma_0 \gamma_{\parallel} \right) G_E(r), \quad (36.19a) \end{aligned}$$

или при $\kappa/N \ll \gamma_{\parallel}$, $\sigma_0 \gamma_{\parallel}$

$$(G'_E(r) + G'_\sigma(r)) = \left(r - \frac{4\sigma_0 Z}{r}\right) G_E(r) + \frac{4Z}{r} G_\sigma(r). \quad (36.19б)$$

Вводя переменную $z = r^2/4$, находим

$$z(G_{E/z} + G_{\sigma/z}) = 2(z - \sigma_0 Z) G_E + 2Z G_\sigma, \quad (36.19в)$$

где

$$Z = \frac{N\gamma_{\parallel}}{4\kappa}, \quad G_{1z} \equiv \frac{dG}{dz}.$$

Уравнение (36.20) принимает вид

$$(G'_E(r) + G'_\sigma(r)) = rG_\sigma(r) - \bar{\sigma}rG_E(r) + \frac{\kappa^2}{g^2 N^2} (3rG_E(r) + r^2 G'_E(r)), \quad (36.20а)$$

где

$$\bar{\sigma} = \frac{\gamma_{\perp} \kappa}{g^2 N}.$$

Ввиду условий

$$\frac{\kappa^2}{g^2 N^2} \ll \bar{\sigma} \quad \text{и} \quad \frac{\kappa^2 r^2}{g^2 N^2} \ll 1,$$

которые справедливы для всех возможных значений $r^2 = 4z \leq 4z_m$ [ср. форму решения (36.24)], мы можем пренебречь членами с $\kappa^2/g^2 N^2$ в (36.20а) и получить записанное через z выражение

$$(G_{E/z} + G_{\sigma/z}) = 2G_\sigma - 2\bar{\sigma}G_E. \quad (36.20б)$$

Исключение $(G_{E/z} + G_{\sigma/z})$ в (36.19в) и (36.20б) приводит к следующим соотношениям между G_E и G_σ :

$$G_\sigma(Z - z) = (\sigma_0 Z - z(1 + \bar{\sigma})) G_E, \quad (36.22)$$

$$G_{\sigma/z}(Z - z) - G_\sigma = (\sigma_0 Z - z(1 + \bar{\sigma})) G_{E/z} - (1 + \bar{\sigma}) G_E. \quad (36.22а)$$

Подставляя в (36.22а) выражения для $G_{\sigma/z}$ и G_σ из уравнений (36.20б) и (36.22) соответственно, мы получаем дифференциальное уравнение первого порядка относительно только одной функции $G_E(z)$:

$$(Z(1 + \sigma_0) - z(2 + \bar{\sigma})) G_{E/z} = 2(Z(\sigma_0 - \bar{\sigma}) - z) G_E,$$

или, поскольку $\bar{\sigma} \ll 2$,

$$\frac{G_{E/z}}{G_E} = \frac{(\hat{z} - z)}{(z_m - z)}, \quad (36.23)$$

где

$$\hat{z} = Z(\sigma_0 - \bar{\sigma}); \quad z_m = \frac{1 + \sigma_0}{2} Z = \frac{\gamma_{01} N}{4\kappa}. \quad (36.24)$$

Уравнение (36.23а) легко решается и в результате дает

$$G_E(z) = \begin{cases} = C_E e^z (z_m - z)^{(z_m - \hat{z})}, & 0 \leq z \leq z_m, \\ = 0, & z > z_m. \end{cases} \quad (36.25)$$

Константа C_E определяется из условия нормировки $\text{Sp } \omega = 1$. Смысл параметров \hat{z} , z_m ясен: поскольку $G_{E/z} = 0$ для $z = \hat{z}$, то \hat{z} является тем значением $\widehat{\beta^* \beta}$, при котором функция распределения (36.25) имеет максимум, тогда как z_m соответствует абсолютному максимуму возможного числа фотонов, которые могут присутствовать в лазерной моде при заданных константах σ_0 , γ_{01} , κ , N . Формула (36.24) для z_m может быть интерпретирована следующим образом: поскольку в стационарном состоянии на уровне 0 находится $N/2$ [точнее, $N(1 - \bar{\sigma})/2$] атомов, то благодаря накачке на уровень I за одну секунду переходит $\gamma_{01}(N/2)$ атомов. Если все эти атомы попадают на уровень посредством вынужденного излучения фотона (а не из-за каких-либо других процессов), то кинетическое уравнение для рожденных и поглощенных фотонов в этом оптимальном случае имеет вид $\gamma_{01}(N/2) = 2\kappa z_m$, что согласуется с (36.24).

Полезно разложить функцию распределения (36.25)¹⁾

$$G_E(z) = C_E \exp[z + (z_m - \hat{z}) \ln(z_m - z)]$$

вблизи ее максимума $z = \hat{z}$. В очень хорошем приближении для всех значений σ_0 получим

$$G_E(z) \approx \tilde{C}_E \exp\left[-\frac{(z - \hat{z})^2}{q^2}\right], \quad (36.26)$$

¹⁾ Функция распределения такого вида (но с не зависящей от накачки шириной) впервые была найдена методом Фоккера — Планка [23, 26]; подобные же функции распределения были найдены и при рассмотрении управляющего уравнения в представлении чисел заполнения [12—15].

где

$$q = \sqrt{2(z_m - \hat{z})}. \quad (36.27)$$

Замечательным результатом, который следует из нашего приближения для статистического оператора, является зависимость ширины q функции распределения $G_E(z)$ от накачки. Вначале на пороге ($\hat{z} = 0$; $\sigma_0 = \bar{\sigma} \ll 1$) мы имеем

$$q^2(\sigma_0 = \bar{\sigma}) = 2z_m \approx Z = \frac{N\gamma_{\parallel}}{4\kappa}, \quad (36.28)$$

а в пределе очень большой накачки $\sigma_0 = 1$ получим

$$q^2(\sigma_0 = 1) = 2z\bar{\sigma} = \frac{\gamma_{\parallel}\gamma_{\perp}}{2g^2}, \quad \hat{z} = \hat{z}_m = Z(1 - \bar{\sigma}). \quad (36.29)$$

Для разумных значений N , γ_{\parallel} , γ_{\perp} , κ , g

$$1 \ll q^2(\sigma_0 = 1) \ll q^2(\sigma_0 = \bar{\sigma}).$$

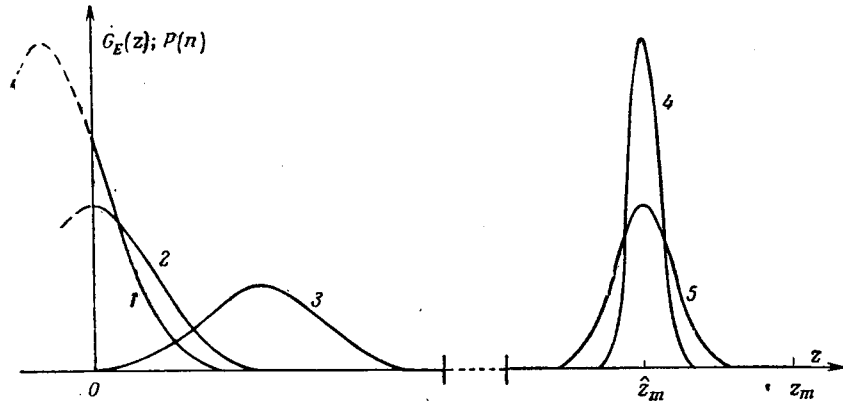
Нужно, конечно, помнить, что $G_E(z)$ не является функцией распределения фотонов $P(n)$. Используя (36.11) и хорошо известную формулу

$$|\langle n | \beta \rangle|^2 = e^{-z} \frac{z^n}{n!} = p_z(n), \quad z = |\beta|^2, \quad (36.30)$$

мы получаем для $P(n)$

$$\begin{aligned} P(n) &= \text{Sp}_{1, 2, \dots, N, F} (|n\rangle \langle n| \int \frac{d^2\beta}{\pi} |\beta\rangle \omega^{(a)}(\beta, \beta^*) \langle \beta| = \\ &= \int_0^{z_m} p_z(n) G_E(z) dz. \end{aligned} \quad (36.31)$$

Ширина $q_p = \sqrt{z}$ распределения Пуассона $p_z(n)$ для рассматриваемых величин z много меньше q при малых накачках, но много больше q при очень больших накачках. Это видно из фиг. 7. Поэтому мы ожидаем, что функция $P(n)$ при очень больших накачках приближается к распределению Пуассона, а при малых накачках почти равна $G_E(n)$.



Ф и г. 7. Распределения $G_E(z)$ и $P(n)$ в зависимости от числа фотонов $z = n$ (схематически).

1 — распределение $G_E(z) \approx P(n)$ немного ниже порога ($\hat{z} < 0$); 2 — распределение $G_E(z) \approx P(n)$ на пороге ($\hat{z} = 0$); 3 — распределение $G_E(z) \approx P(n)$ немного выше порога ($\hat{z} > 0$), полуширина $q_m \approx \sqrt{z_m}$; 4 — распределение $G_E(z)$ при максимальной накачке: $\sigma_0 = 1$, $\hat{z} = \hat{z}_m$ и полуширина $q_{IV} = \sqrt{z_m - \hat{z}_m}$; 5 — распределение фотонов $P(n)$ при максимальной накачке: $\sigma_0 = 1$, полуширина $q_{IV} = \sqrt{z_m} \gg q_{IV}$, если $(z_m - \hat{z}_m)/z_m \ll 1$.

§ 3в. Уравнения Фоккера — Планка и их решения

Уравнение движения (2.60) для функции распределения $f(u, u^*, v, v^*, l; t)$ все еще имеет сложную структуру. Если мы сохраним только главные члены, то получим для f следующее уравнение Фоккера — Планка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{u}, \mathbf{v}, x_3; t)}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x_3} \{(\gamma_{\parallel}(x_3 - x_3^0) + 4g\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) f\} + \\ & + \nabla_{\mathbf{u}} \{(\kappa\mathbf{u} - g\mathbf{v}) f\} + \nabla_{\mathbf{v}} \{(\gamma_{\perp}\mathbf{v} - gx_3\mathbf{u}) f\} + \\ & + \frac{\kappa}{2} \left(n_{\text{тепл}} + \frac{1}{2} \right) \Delta_{\mathbf{u}} f + \frac{1}{4} N\gamma_{\perp} \Delta_{\mathbf{v}} f + N\gamma_{\parallel} \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}. \end{aligned} \quad (3в.1)$$

Здесь мы ввели вещественные переменные u_1, u_2, v_1, v_2, x_3 и используемые далее величины x_j ($j = 1 \dots 5$) посредством соотношений

$$\begin{aligned} u = u_1 + iu_2 = x_1 e^{ix_4} (= \text{Re} + i\varphi), \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \\ (-i)S^- \rightarrow (-i)v = v_1 + iv_2 = x_2 e^{ix_5}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (3в.2) \\ l = \frac{1}{2} x_3. \end{aligned}$$

Ранее уравнение (3б.1) было выведено [28, 30] полуклассическим способом путем определения появляющихся в обобщенном уравнении Фоккера — Планка

$$\frac{\partial f(x_l, t)}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (B_i(x_l) f) + \frac{1}{2} \sum_{i, j} \frac{\partial^2 (Q_{ij}(x_l) f)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (3в.3)$$

диссипативной и флуктуационной констант $B_i(x_l)$ и $Q_{ij}(x_l)$ с помощью следующих (по аналогии с их классическим определением) выражений:

$$B_i(x_l) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \text{Sp}_{BS} \{F(X_l(t) - X_l(0))\}, \quad (3в.4)$$

$$Q_{ij}(x_l) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \text{Sp}_{BS} \{F(X_l(t) - X_l(0))(X_j(t) - X_j(0))\}. \quad (3в.5)$$

Здесь оператор X_i относится к переменным x_i , а F есть введенный в (2.24) статистический оператор системы S и тепловых резервуаров B . Выражения (3в. 4) и (3в. 5) можно вычислить по теории возмущений вплоть до второго порядка малости; в результате получаем уравнение (3в. 1) для лазерной системы.

В области *достаточно высоко над порогом* это уравнение легко решается, если ввести полярные координаты x_1, x_2, x_4, x_5 [ср. (3в. 2)] и относительные отклонения ξ_j от стационарных значений $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$:

$$\xi_1 = \frac{x_1 - \bar{x}_1}{\bar{x}_1}, \quad \xi_2 = \frac{x_2 - \bar{x}_2}{\bar{x}_2}, \quad \xi_3 = \frac{(x_3^0 - x_3) - (x_3^0 - \bar{x}_3)}{x_3^0 - \bar{x}_3},$$

$$\xi_4 = x_4, \quad \xi_5 = x_5, \quad (3в.6)$$

причем

$$\bar{x}_1 = \sqrt{\bar{n}}, \quad \bar{x}_2 = \sqrt{\bar{n}} \frac{\kappa}{g}, \quad \bar{x}_3 = \frac{\kappa \gamma_{\perp}}{g^2}, \quad (3в.7)$$

$$x_3^0 - \bar{x}_3 = \frac{4\bar{n}\kappa}{\gamma_{\parallel}},$$

где \bar{n} — число фотонов в лазерной моде выше порога в отсутствие шума.

Если теперь разложить коэффициенты B_i, Q_{ij} в (3в. 1) вплоть до линейных по ξ_j ($j = 1 \dots 5$) членов, то получим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^5 \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\beta_{ij} \xi_j f) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^5 \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} (Q_{ij} f), \quad (3в.8)$$

где

$$\beta = (\beta_{ij}) = \begin{pmatrix} -\kappa, & \kappa, & 0, & 0, & 0 \\ \gamma_{\perp}, & -\gamma_{\perp}, & \frac{(-4)g^2\bar{n}}{\gamma_{\parallel}}, & 0, & 0 \\ \gamma_{\parallel}, & \gamma_{\parallel}, & -\gamma_{\parallel}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -\kappa, & \kappa \\ 0, & 0, & 0, & \gamma_{\perp}, & -\gamma_{\perp} \end{pmatrix}, \quad (3в.9)$$

$$Q = (Q_{ij}) = (\delta_{ij} q_i), \quad q_i = \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{\bar{n}} \left(n_{\text{тепл}} + \frac{1}{2} \right) \\ \frac{1}{2} \frac{g^2}{\kappa^2} \gamma_{\perp} \frac{N}{\bar{n}} \\ \frac{\gamma_{\parallel}^3}{8\kappa^2} \frac{N}{\bar{n}} \\ \frac{\kappa}{\bar{n}} \left(n_{\text{тепл}} + \frac{1}{2} \right) \\ \frac{1}{2} \frac{g^2}{\kappa^2} \gamma_{\perp} \frac{N}{\bar{n}^2} \end{pmatrix}.$$

Функция Грина уравнения (Зв. 8) хорошо известна [58] и имеет вид

$$G(\xi, \xi'; t) = \frac{\exp \left[-(\sigma^{-1})_{ij}(t) (\xi_i - b_{ik}(t) \xi'_k) (\xi_j - b_{jl}(t) \xi'_l) \right]}{\sqrt{\pi^n \text{Det } \sigma(i)}}. \quad (3\text{в.}10)$$

Функция $G(\xi, \xi'; t)$ удовлетворяет начальному условию

$$G(\xi, \xi'; 0) = \delta^5(\xi - \xi') \quad (3\text{в.}11)$$

и при $t \rightarrow \infty$ приближается к стационарному решению

$$G(\xi, \xi'; \infty) = \frac{\exp \left[-\sigma_{ij}^{-1}(\infty) \xi_i \xi_j \right]}{\sqrt{\pi^n \text{Det } \sigma(\infty)}} \equiv f(\xi; \infty). \quad (3\text{в.}12)$$

Коэффициенты $\sigma_{ij}(t)$, $x_{ij}(t)$ в (Зв. 10) определены соотношениями

$$\beta \sigma(\infty) + \sigma(\infty) \beta^T = -2\mathbf{Q}, \quad (3\text{в.}13)$$

$$\dot{b}_{is} = \beta_{ij} b_{js}; \quad b_{js}(0) = \delta_{js}, \quad (3\text{в.}14)$$

$$\sigma_{ij}(t) = [\delta_{is} \delta_{jr} - b_{is}(t) b_{jr}(t)] \sigma_{sr}(\infty). \quad (3\text{в.}15)$$

Стационарная совместная функция распределения F для $\xi_i = \xi_i(t + \tau)$ и $\xi'_i = \xi_i(t)$ теперь, очевидно, имеет вид

$$F(\xi, \xi'; \tau) = G(\xi, \xi'; \tau) \cdot f(\xi'; \infty). \quad (3\text{в.}16)$$

С помощью этого соотношения можно легко получить все интересующие нас функции. Например,

$$g_{ij}(\tau) \equiv \langle \xi_i(t + \tau) \xi_j(\tau) \rangle = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_i \xi_j' F(\xi, \xi'; \tau) d^5 \xi d^5 \xi' = \frac{1}{2} b_{is}(\tau) b_{sj}(\infty). \quad (3в.17)$$

С другой стороны, корреляционная функция комплексной амплитуды поля равна

$$G(\tau) = \langle b^\dagger(t + \tau) b(t) \rangle = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \exp[-ix_4 \cdot x_1' \exp[ix_4'] F(\xi, \xi'; \tau) d^5 \xi d^5 \xi']. \quad (3в.18)$$

Можно заметить, что структура этой формулы полностью согласуется с формулой (2.66), которая была выведена без всякого использования полуклассических приближений.

В рассматриваемом здесь резонансном случае совместная функция распределения $F(\xi, \xi'; \tau)$ благодаря виду матрицы β распадается на произведение амплитудной и фазовой функций распределения, содержащих переменные ξ_1, ξ_2, ξ_3 и $\xi_4 = x_4, \xi_5 = x_5$ соответственно. Поэтому $G(\tau)$ также факторизуется:

$$G(\tau) = G_A(\tau) G_\Phi(\tau), \quad (3в.19)$$

где

$$G_A(\tau) = \langle x_1(t + \tau) x_1(t) \rangle,$$

$$G_\Phi(\tau) = \langle \exp[-i(x_4(t + \tau) - x_4(t))] \rangle.$$

В то время как $G_A(\tau)$ содержит большую постоянную часть \bar{x}_1^2 , описывающая диффузию фазы функция $G_\Phi(\tau)$ ответственна в основном за ширину линии. Подставляя нашу функцию $F(\xi, \xi'; \tau)$ в (3в.18), мы получим в явном виде

$$G_\Phi(\tau) = \exp[-\Delta\tau - h(1 - \exp[-(\kappa + \gamma_\perp)\tau])], \quad (3в.20)$$

где

$$\Delta = \frac{\gamma_{\perp}}{4\bar{n}(\kappa + \gamma_{\perp})^2} [\gamma_{\perp}\kappa(2n_{\text{тепл}} + 1) + Ng^2] =$$

$$= \frac{\hbar\omega\kappa^2\gamma_{\perp}^2}{P(\gamma_{\perp} + \kappa)^2} \left[\frac{N_2_{\text{пор}}}{(N_2 - N_1)_{\text{пор}}} + n_{\text{тепл}} \right] \quad (3\text{В.21})$$

[$P = \hbar\omega\bar{n} \cdot 2\kappa$ — мощность генерации; $(N_2 - N_1)_{\text{пор}} = \bar{x}_3$]

и

$$h = \frac{1}{4\bar{n}(\kappa + \gamma_{\perp})^3} [\kappa^2(\kappa + 2\gamma_{\perp})(2n_{\text{тепл}} + 1) - N\gamma_{\perp}g^2]. \quad (3\text{В.22})$$

Поскольку $|h| \ll 1$, то Δ определяет ширину линии. Формула (3в. 21) для ширины линии применима к однородно уширенному лазеру и была найдена также методом Ланжевена [5, 9]. Формула (3а, 57) применима к неоднородно уширенному лазеру, причем в этом случае явно подразумевается, что $\kappa \ll \gamma$ (см. также [33]). Для корреляционной функции флуктуаций интенсивности, т. е. для $G_A(\tau)$, можно, конечно, получить точную формулу. При этом результаты снова согласуются с данными, полученными методом Ланжевена [см. (3а, 48), (3а, 56)]. В пороговой области мы будем вычислять эти корреляционные функции следующим образом.

Приближенная запись (3в. 1) в виде уравнения (3в. 8) с линеаризованными коэффициентами перестает быть справедливой в пороговой области, где для решения (3в. 1) не существует простых аналитических методов. Чтобы рассмотреть также и эту пороговую область, мы можем исключить инверсию и атомный дипольный момент, т. е. переменные x_3, v_1, v_2 , посредством адиабатической аппроксимации в (3в. 1). При этом мы приходим к уравнению Фоккера — Планка для функции распределения одной только переменной светового поля $u = u_1 + iu_2 = Re^{i\varphi}$:

$$\frac{\partial f(R, \varphi; t)}{\partial t} + \beta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \{(\bar{n} - R^2) R^2 f\} =$$

$$= q \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial f}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right\}. \quad (3\text{В.23})$$

Коэффициенты в (Зв.23) равны

$$\beta = \frac{4\kappa^2 \gamma_{\perp}}{\gamma_{\parallel} (\kappa + \gamma_{\perp}) (N_2 - N_1)_{\text{пор}}}, \quad \bar{n} = \frac{\gamma_{\parallel}}{4\kappa} (x_3^0 - \bar{x}_3), \quad (3\text{в.24})$$

$$q = \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\gamma_{\perp}}{\kappa + \gamma_{\perp}} \right)^2 \left\{ n_{\text{тепл}} + \frac{N_2 \text{ пор}}{(N_2 - N_1)_{\text{пор}}} \right\}$$

[ср. с (Зв.7)].

Уравнение (Зв.24) соответствует уравнению Ван дер Поля

$$\dot{b}^{\dagger} - \beta (\bar{n} - b^{\dagger} b) b^{\dagger} = F_{\text{полн}}(t), \quad (3\text{в.25})$$

которое согласуется с уравнением (За.18) при точном резонансе. Фактически уравнение (Зв.23) было выведено [26, 27] из (Зв.25). Вводя безразмерные координаты

$$r = \sqrt[4]{\frac{\beta}{q}} R, \quad T = \sqrt{\beta q} t, \quad a = \sqrt{\frac{\beta}{q}} \bar{n}, \quad (3\text{в.26})$$

мы вместо (Зв.23) получим

$$\frac{\partial f}{\partial T} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \{ (a - r^2) r^2 f \} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}. \quad (3\text{в.23a})$$

Точное стационарное решение уравнения (Зв.23a) имеет вид

$$f(r) = \frac{C}{2\pi} \exp \left[-\frac{r^4}{4} + a \frac{r^2}{2} \right],$$

$$\frac{1}{C} = \int_0^{\infty} r \exp \left[-\frac{r^4}{4} + a \frac{r^2}{2} \right] dr, \quad (3\text{в.27})$$

который можно сравнить с видом стационарных распределений, найденных другими методами [12—15, 18, 23]. (Ср. также формулы (Зв.25), (Зв.31) этой лекции.)

Для нестационарного решения уравнения (Зв.23a) мы используем приближение [26, 31]

$$f(r, \varphi; T) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{nm} f_{nm}(r) \exp[in\varphi] \exp[-\lambda_{nm} T], \quad (3\text{в.28})$$

где $f_{nm}(r)$ удовлетворяет уравнению Штурма — Лиувилля

$$(p(r) f'_{nm})' - q_n f_{nm} + \lambda_{nm} p f_{nm} = 0, \quad (3в.29)$$

причем

$$p(r) = r \exp \left[\frac{r^4}{4} - a \frac{r^2}{2} \right], \quad q_n(r) = \left(2a - 4r^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) p(r). \quad (3в.30)$$

Конечно, стационарное решение $f(r) \sim f_{00}(r)$; $\lambda_{00} = 0$ содержится в (3в.28). Равным образом можно подставить

$$f_{nm}(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \exp \left[-\frac{r^4}{8} + a \frac{r^2}{4} \right] \Psi_{nm}(r) \quad (3в.31)$$

и получить одномерное уравнение Шредингера для собственных функций $\Psi_{nm} = \Psi_{-nm}$, соответствующих собственным значениям $\lambda_{nm} = \lambda_{-nm}$:

$$\Psi''_{nm}(r) + (\lambda_{nm} - V_n(r)) \Psi_{nm} = 0, \quad (3в.32)$$

где потенциал V_n дается выражением

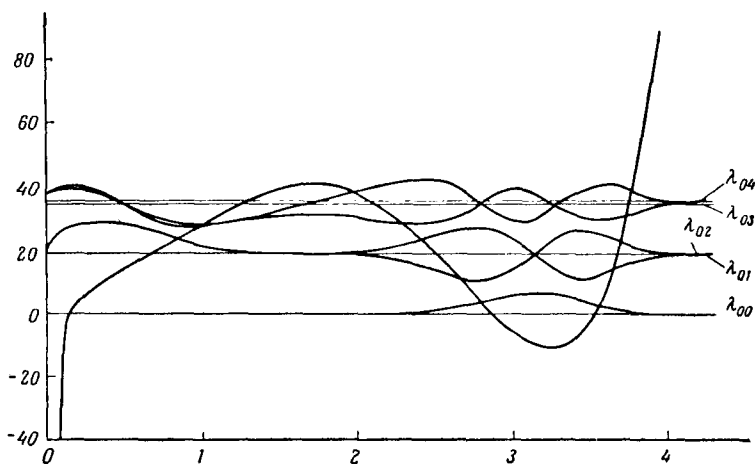
$$V_n(r) = \left(n^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{r^2} + a + \left(\frac{a^2}{4} - 2 \right) r^2 - \frac{1}{2} a r^4 + \frac{r^6}{4}. \quad (3в.33)$$

Потенциал $V_0(r)$, пять первых собственных значений λ_{0m} и собственных функций $\Psi_{0m}(r)$ для значения параметра накачки $a = 10$ показаны на фиг. 8. Вследствие условия полноты для соответствующим образом нормированных функций $f_{nm}(r)$

$$\delta(r - r') = p(r') \sum_{m=0}^{\infty} f_{nm}(r) f_{nm}(r') \quad (3в.34)$$

функция Грина $G(r, \varphi; r', \varphi'; \tau)$ уравнения (Зв.23а) принимает вид

$$G(r, \varphi; r', \varphi'; \tau) = \frac{p(r')}{2\pi r'} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{nm}(r) f_{nm}(r') \exp[in(\varphi - \varphi')] \exp[-\lambda_{nm}\tau], \quad (Зв.35)$$



Фиг. 8. Потенциал $V_0(r)$ уравнения Шредингера (Зв.32) и пять первых собственных функций λ_{0m} и собственных функций Ψ_{0m} при $a = 10$ (m — число узлов Ψ_{0m}).

с начальным условием

$$G(r, \varphi; r', \varphi'; 0) = \frac{1}{r'} \delta(r - r') \delta(\varphi - \varphi'). \quad (Зв.36)$$

С помощью стационарной совместной функции распределения

$$F(r, \varphi; r', \varphi'; \tau) = G(r, \varphi; r', \varphi'; \tau) f(r) \quad (Зв.37)$$

теперь можно вычислить корреляционные функции поля также и в пороговой области. Рассмотрим, например,

корреляционную функцию $K(\tau)$ флуктуаций интенсивности

$$\begin{aligned}
 K(\tau) &= \langle (r^2(t + \tau) - \langle r^2 \rangle)(r^2(t) - \langle r^2 \rangle) \rangle = \\
 &= \langle r^2(t + \tau) r^2(t) \rangle - \langle r^2 \rangle^2 = \\
 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 r'^2 F(r, \varphi; r', \varphi'; \tau) r dr d\varphi r' dr' d\varphi' - \\
 &- \left\{ 2\pi \int_0^\infty r^2 f(r) r dr \right\}^2 = N \sum_{m=1}^\infty \left[\int_0^\infty r^3 f_{0m}(r) dr \right]^2 \exp[-\lambda_{0m}\tau] = \\
 &= C \sum_{m=1}^\infty \left[\int_0^\infty r^3 f_{0m}(r) dr \right]^2 \exp[-\lambda_{0m}\tau] = \\
 &= K(0) \sum_{m=1}^\infty M_m \exp[-\lambda_{0m}\tau]. \quad (3\text{в.38})
 \end{aligned}$$

Коэффициенты

$$M_m = \frac{C}{K(0)} \left[\int_0^\infty r^3 f_{0m}(r) dr \right]^2$$

соответствуют относительному вкладу экспоненциальных членов m -го порядка. Спектр флуктуаций интенсивности дается фурье-образом корреляционной функции $K(\tau)$:

$$S(\omega) = K(0) \sum_{m=1}^\infty M_m \frac{\lambda_{0m}}{\omega^2 + \lambda_{0m}^2}. \quad (3\text{в.39})$$

Эта суперпозиция лоренцевых линий может быть аппроксимирована «эффективной» функцией Лоренца

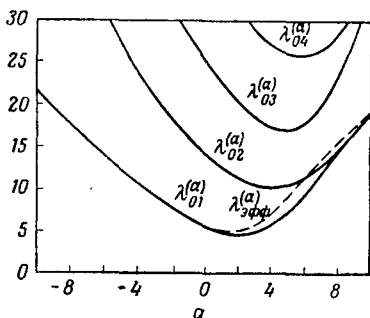
$$S(\omega) = K(0) \frac{\lambda_{\text{эфф}}}{\omega^2 + \lambda_{\text{эфф}}^2}, \quad (3\text{в.40})$$

где $\lambda_{\text{эфф}}$ определяется выражением

$$\frac{1}{\lambda_{\text{эфф}}} = \sum_{m=1}^\infty \frac{M_m}{\lambda_{0m}}. \quad (3\text{в.41})$$

Наименьшие собственные значения λ_{0m} и собственные функции Ψ_{0m} или f_{0m} были вычислены Рисkenом и Воллмером [31] и Лэксом [25].

Четыре первых значения $\lambda_{01}^{(a)} \dots \lambda_{04}^{(a)}$ и $\lambda_{эфф}^{(a)}$ приведены на фиг. 9 как функции введенного в (3в.26) параметра накачки. Недавно величина $\lambda_{эфф}^{(a)}$ была очень тщательно измерена Ареки в окрестности порога при



Фиг. 9. Четыре собственных значения λ_{0m} ($m=1, 2, 3, 4$) (сплошные кривые) и эффективное собственное значение $\lambda_{эфф} = \left[\sum_m M_m / \lambda_{0m} \right]^{-1}$ (пунктирная кривая) как функции параметра накачки a .

$a = 0$). Экспериментальные значения прекрасно согласуются с теоретической кривой.

§ 4. Обсуждение конечных результатов

Обсудим теперь конечные результаты, которые можно продемонстрировать на примере амплитудных флуктуаций или флуктуаций интенсивности, описываемых корреляционной функцией

$$K(\tau) = \langle b^\dagger(0) b^\dagger(\tau) b(\tau) b(0) \rangle - \langle b^\dagger(\tau) b(\tau) \rangle \langle b^\dagger(0) b(0) \rangle.$$

В первой строке табл. 1 показан уровень генерации относительно порога. В столбцах приведены различные типы лазеров, классифицированные в соответствии с

¹) См. лекции Ареки в этом сборнике. — Прим. ред.

Флуктуации амплитуды (интенсивности)

Таблица 1

Уровень генерации	Намного ниже		Ниже	На пороге	Несколько выше		Намного выше
	Использованный метод	Линеаризация ¹⁾		Точный нелинейный метод ²⁾	Уравнение Ван дер Поля	Квазилинеаризация ³⁾	
Гауссово распределение ⁴⁾		Вывод	Решение (точное)				
Лазер с однородно уширенной линией (твердотельный)	⁴⁾		⁵⁾			$\langle \rho(t) \rho(t + \tau) \rangle =$ $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\omega) \exp[i\omega t] d\omega}{h(\omega) h(-\omega)}$	
Лазер с неоднородно уширенной линией	$ \langle b^+(0) b(0) \rangle ^2 \times$ $\times \exp[-\Delta\omega t]$		⁶⁾	²⁾ $K(a, \tau) \approx$ $\approx K(a, 0) \times$		$K(0) \exp[-\lambda\tau],$	
Газовый лазер	Поправки высших порядков ⁴⁾		⁶⁾	$\times \exp[-\lambda_{эфф}\tau]$		$\lambda = 2\kappa \frac{d_0 - d_c}{d_c}$	
Полупроводниковый лазер			⁷⁾			$3, 6)$	
						$g, h - \text{полиномы: резонансы!}$	
						См. фиг. 5 ⁸⁾	
						См. фиг. 4 ⁹⁾	
						Еще не сделано	

¹⁾ Гордон [57].

²⁾ Рискен [26].

³⁾ Хакен [5].

⁴⁾ Глаубер [38], Мандель [44], Коренман [42].

⁵⁾ Хакен [5], Лэкс [9], Заурман [10].

⁶⁾ Арцт и др. [1].

⁷⁾ Хауг и Хакен [7].

⁸⁾ Хакен [5], Рискен и др. [28].

⁹⁾ Арцт и др., не опубликовано.

уширением линии и в зависимости от того, движутся атомы или покоятся. В области ниже порога полевое уравнение может быть линеаризовано и корреляционная функция K приведена в середине первого столбца. Амплитуда поля имеет гауссово распределение для всех типов лазеров. В области ниже порога, на пороге и несколько выше порога справедливо уравнение Ван дер Поля. Цифры в скобках указывают на литературу, где приведены результаты или выводы. В близкой к порогу области уравнение Ван дер Поля решается точно. Результат может быть записан в форме, приведенной в середине столбца. При числе фотонов, более чем в 10 раз превышающем число фотонов на пороге, применим метод квазилинеаризации. В случае однородно уширенной линии общий результат можно выразить в виде интеграла. Для лазеров с неоднородно уширенной линией и для газовых лазеров можно получить численные результаты (фиг. 5 и 6).

ЛИТЕРАТУРА

а) Квантовомеханические уравнения Ланжевена

1. Arzt V., Haken H., Risken H., Sauermann H., Schmid Ch., Weidlich W., Zs. Phys., 197, 207 (1966).
2. Haken H., Zs. Phys., 181, 96 (1964).
3. Haken H., Phys. Rev. Lett., 13, 329 (1964).
4. Haken H., Zs. Phys., 182, 346 (1965).
5. Haken H., Zs. Phys., 190, 327 (1966).
6. Haken H., Sauermann H., Schmid Ch., Vollmer H. D., Zs. Phys., 206, 369 (1967).
7. Haug H., Haken H., Zs. Phys., 204, 262 (1967).
8. Lamb W. E., Jr., в книге Quantum Optics and Coherent Light, eds. A. Blondin, C. Cohen-Tannoudji, New York, 1965.
9. Lax M., Physics of Quantum Electronics, eds. P. L. Kelley, B. Lax, P. E. Tannenwald, New York, 1966, p. 735.
10. Sauermann H., Zs. Phys., 189, 312 (1966).
11. Haken H., Sauermann H., Proc. S. I. F., vol. 31.

б) Метод управляющего уравнения

12. Fleck J. A., Phys. Rev., 149, 309 (1966).
13. Fleck J. A., Phys. Rev., 149, 322 (1966).
14. Scully M., Lamb W. E., Jr., Stephen M., Physics of Quantum Electronics, 1966, p. 759.
15. Scully M., Lamb W. E., Jr., Phys. Rev. Lett., 16, 853 (1966).
16. Weidlich W., Haake F., Zs. Phys., 185, 30 (1965).

17. Weidlich W., Haake F., Zs. Phys., **186**, 203 (1965).
18. Weidlich W., Risken H., Haken H., Zs. Phys., **201**, 396 (1967).
19. Willis C. R., Journ. Math. Phys., **5**, 1241 (1964).
20. Willis C. R., Phys. Rev., **147**, 406 (1966).

в) Метод уравнения Фоккера—Планка (для квантовых систем)

21. Haken H., Risken H., Weidlich W., Zs. Phys., **204**, 223 (1967).
22. Haken H., Risken H., Weidlich W., Zs. Phys., **206**, 355 (1967).
23. Hempstead R. D., Lax M., Phys. Rev., **161**, 350 (1967).
24. Lax M., Louisell W. H., IEEE of Quantum Electronics, QE-3, 47 (1967).
25. Lax M., Phys. Rev., **157**, 213 (1967).
26. Risken H., Zs. Phys., **186**, 85 (1965).
27. Risken H., Zs. Phys., **191**, 302 (1966).
28. Risken H., Schmid Ch., Weidlich W., Zs. Phys., **193**, 37 (1966).
29. Risken H., Schmid Ch., Weidlich W., Zs. Phys., **194**, 337 (1966).
30. Risken H., Schmid Ch., Weidlich W., Phys. Lett., **20**, 489 (1966).
31. Risken H., Vollmer H. D., Zs. Phys., **201**, 323 (1967).
32. Schmid C., Risken H., Zs. Phys., **189**, 356 (1966).

г) Другие квантовомеханические трактовки

33. Korenman V. Am. Phys. (New York), **39**, 72 (1966); Phys. Rev. Lett., **14**, 293 (1965).
34. Willis C. R., Phys. Rev., **147**, 406 (1966); **156**, 320 (1967).

Кинетические уравнения

35. Lax M., IEEE Journ. Quantum Electronics, QE 337 (1967).
36. McGumber D. E., Phys. Rev., **141**, 306 (1966).
37. Shimoda K., Takahasi H., Townes C. H., Journ. Phys. Soc. Japan, **12**, 686 (1957).

д) Математический аппарат и вспомогательные теоремы

38. Glauber R. J., Phys. Rev. Lett., **10**, 84 (1963); Phys. Rev., **130**, 2529; **131**, 2766 (1963), Quantum Optics and Electronics, eds. C. De Witt, A. Blandin, C. Cohen-Tannoudji, New York, 1965 (см. перевод в сб. «Квантовая оптика и квантовая радиофизика», Изд-во «Мир», 1966).
39. Haken H., Weidlich W., Zs. Phys., **189**, 1 (1966).
40. Haken H., Weidlich W., Zs. Phys., **205**, 96 (1967).
41. Kelley P. L., Kleiner W. H., Phys. Rev., **136**, A316 (1964).
42. Korenman V., Phys. Rev., **154**, 1233 (1967).
43. Mandel L., Proc. Phys. Soc. (London), **72**, 1037 (1958).
44. Mandel L., Progress in Optics, ed. E. Wolf, Amsterdam, 1963, p. 183.
45. Mandel L., Wolf E., Rev. Mod. Phys., **37**, 231 (1965).

46. *Sauermann H.*, Zs. Phys., **188**, 480 (1965).
47. *Senitzky J. R.*, Phys. Rev., **119**, 670 (1960); **123**, 1525 (1961).
48. *Sudarshan E. C. G.*, Phys. Rev. Lett., **10**, 277 (1963).

е) Экспериментальные результаты

49. *Armstrong J. A., A. W. Smith*, Phys. Rev. Lett., **14**, 68 (1965); Phys. Rev., **140**, A155 (1965).
50. *Arecchi F. T., Berne A., Burlamacchi P.*, Phys. Rev. Lett., **16**, 32 (1966).
51. *Arecchi F. T., Rodari G. S., Sona A.*, Phys. Lett., **25A**, 1, 59 (1967).
52. *Chang R. F., Detenbeck R. W., Korenman V., Alley C. O., Jr., Hochuli U.*, препринт (1967).
53. *Freed C., Haus H. A.*, Appl. Phys. Lett., **6**, 85 (1965); Phys. Rev., **141**, 287 (1965).
54. *Johnson F., McLean T., Pike E.*, Physics of Quantum Electronics, 1966, p. 706.
55. *Martienssen W., Spiller E.*, Phys. Rev. Lett., **16**, 531 (1966); Phys. Rev., **145**, 285 (1966).
56. *Smith A. W., Armstrong J. A.*, Phys. Rev. Lett., **16**, 1169 (1966).
57. *Gordon J. P.*, Proc. S. I. F., vol. 31, p. 156.
58. *Wang Ming Chen, Ulenbeck G. F.*, Rev. Mod. Phys., **17**, 323 (1945).

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЛАЗЕРА

А. П. Казанцев, Г. И. Сурдутович

§ 1. Квантовый и квазиклассический методы описания флуктуаций

При описании флуктуаций излучения лазера возможны в принципе два подхода: квазиклассический и квантовый. Остановимся кратко на сравнении этих методов. В первом случае электромагнитное поле является классической величиной, а атомы описываются матрицей плотности. Чтобы учесть флуктуации излучения, в уравнение движения для поля и среды можно ввести по методу Ланжевена случайные сторонние силы. В этом случае, естественно, возникает вопрос о том, как правильно определить корреляторы этих сил. Ответить на него просто можно лишь при малых энергиях излучения, когда допустимо пользоваться термодинамическими соображениями. Рассмотрим простой пример газового лазера. В этом случае время жизни атома τ обычно мало по сравнению с временем жизни фотона в резонаторе $1/\nu$ ($\nu\tau \ll 1$). Поэтому атомная система успевает следовать за полем, и мы имеем укороченное нелинейное уравнение Максвелла для комплексной амплитуды поля $E(t)$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \chi(E) E = f(t), \quad (1)$$

$$\langle f^*(t_1) f(t_2) \rangle = D \delta(t_1 - t_2),$$

где $\chi(E)$ — нелинейная поляризуемость среды ¹⁾.

Флуктуации поля обусловлены спонтанным излучением атомов, которые затухают за малое время τ . Поэтому коррелятор случайной силы $F(t)$ можно заменить δ -функцией времени.

Как известно, функция распределения поля $F(t, E)$ в данном случае подчиняется уравнению Фоккера —

¹⁾ Такое определение χ отличается от обычного множителем i .

Планка

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial E} (\chi E F) + \frac{\partial}{\partial E^*} (\chi E^* F) + D \frac{\partial^2 F}{\partial E \partial E^*}. \quad (2)$$

Коэффициент диффузии D можно определить следующим образом. Рассмотрим лазер ниже порога генерации. Тогда можно ввести эффективную температуру излучения T с помощью соотношения $N/N_{\text{пор}} = e^{-\hbar\omega/kT} \approx 1 - \hbar\omega/kT$, где N — число возбужденных атомов, а $N_{\text{пор}}$ — пороговое значение этого числа. Величина $\eta = N/N_{\text{пор}}$ называется параметром генерации, $\eta = 1$ соответствует порогу.

Распределение фотонов в этой области подчиняется закону Планка со средним числом фотонов \bar{n}

$$F = \frac{1}{\bar{n}} e^{-n/\bar{n}}, \quad (3)$$

$$\bar{n} = \frac{1}{1-\eta}, \quad \eta < 1. \quad (4)$$

Ниже порога величина χ не зависит от поля $\chi \approx \nu(1-\eta)$. Чтобы получить из уравнения Фоккера — Планка среднее число фотонов (3), следует принять

$$D = \frac{4\pi\nu\omega}{V}, \quad (5)$$

где V — объем, занимаемый полем. Очевидно, что значением D , найденным ниже порога генерации, можно пользоваться и выше порога до тех пор, пока $\eta - 1 \ll \ll 1$. Это связано с тем, что D определяется вероятностью спонтанного излучения атома $W_{\text{сп}}$, которая в слабом поле близка к единице.

Отметим, что уравнение (2) описывает простейшую модель фазового перехода второго рода в малом объеме. Пороговая область, таким образом, обладает универсальными свойствами; здесь флуктуации можно определить из феноменологических соображений. При $\eta - 1 \geq 1$ интенсивность случайных сил нельзя получить из термодинамических соотношений, в этом случае нужно учитывать зависимость D от η . Отвлекаясь от постоянных множителей, эту зависимость можно представить в виде

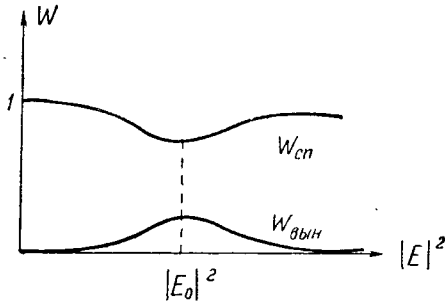
$$D \sim \eta W_{\text{сп}}. \quad (6)$$

Первый множитель η обусловлен тем, что интенсивность шума пропорциональна числу возбужденных атомов. Зависимость $W_{\text{сп}}$ от поля качественно показана на фиг. 1. Такую зависимость можно пояснить следующим образом.

Представим ток излучения j отдельного атома в виде

$$j = \langle j \rangle + \delta j, \quad \langle \delta j \rangle = 0, \quad (7)$$

где $\langle j \rangle$ — квантовое среднее оператора тока. Фаза среднего тока определяется фазой поля, поэтому $\langle j \rangle$ дает



Фиг. 1. Зависимость вероятности спонтанного и вынужденного излучений от поля.

$|E_0|^2$ — поле, определяемое параметрами насыщения.

вклад в когерентную часть поля и определяет вероятность вынужденного излучения $W_{\text{вын}} \sim \langle j \rangle^2 / \langle j^2 \rangle$. Флуктуации тока δj дают вклад во флуктуирующую часть поля и определяют вероятность спонтанных переходов $W_{\text{сп}} \sim \langle \delta j^2 \rangle / \langle j^2 \rangle$. Отметим, что $W_{\text{сп}} + W_{\text{вын}} = 1$. В слабом и сильном полях (вследствие эффекта насыщения) величина $W_{\text{вын}}$ мала, так что $W_{\text{сп}}$ имеет минимум при насыщающем поле. Подробно этот вопрос разбирается в § 6. Таким образом, проблема сводится к решению квантовой задачи о спонтанном излучении атомов в одну моду в присутствии сильного поля. В общем случае в атомах с различными константами релаксации суммарная вероятность $W_{\text{сп}} + W_{\text{вын}}$ не сохраняется. Кроме того, при больших плотностях атомов спонтанное излучение атомов нельзя считать независимым.

Задача о спонтанном излучении свободного атома в присутствии сильного поля была рассмотрена в работах [1, 19].

§ 2. Три типа лазеров

Обозначим через τ_a и τ_b времена жизни верхнего и нижнего уровней, а через τ_{ab} — время люминесценции.

В зависимости от соотношения между константами релаксации ν и τ квантовые генераторы можно разбить на три группы:

$$\nu\tau_a, \nu\tau_b \ll 1, \nu\tau_{ab} \ll 1. \quad (8)$$

Этот случай характерен для газового лазера

$$\tau_a \approx \tau_b \approx \tau_{ab} \approx \tau, \nu\tau \geq 1. \quad (9)$$

Случай (9) интересен тем, что при $\nu\tau > 2$ и достаточно большой энергии излучения одномодовая генерация становится неустойчивой и переходит в колебательный режим. Такие параметры имеет молекулярный генератор. Однако ввиду очень большого численного значения параметра $\nu\tau \sim 10^3$ генерация оказывается устойчивой (см. область неустойчивости на фиг. 3).

В газовых лазерах параметр $\nu\tau$ в некоторых случаях, видимо, может быть порядка единицы и больше. В особенности это замечание относится к He—Ne-лазеру на 3,39 мкм, к ртутному лазеру на 1,52 мкм и к лазеру с нелинейной поглощающей ячейкой, в которой при малом давлении τ может быть большим:

$$\tau_a \approx \tau_b \approx \tau, \tau_{ab} \ll \tau, \nu\tau \geq 1, \nu\tau_{ab} \ll 1. \quad (10)$$

Этот случай типичен для твердотельных, полупроводниковых и CO₂-лазеров. Так, в рубиновом лазере $\tau_{ab} \sim 10^{-12}$ с, $\tau \sim 10^{-3}$ с. При таком соотношении времен неустойчивость не возникает, но уровень флуктуаций значительно больше, чем в случае (8).

Как мы увидим, во всех трех случаях флуктуации носят различный характер. В случае (8) спонтанное излучение отдельных атомов можно считать независимым. В случае (9) необходимо учесть взаимодействие спонтанных электромагнитных цугов, испущенных разными

атомами. При этом взаимодействие носит когерентный характер. Наконец, в случае (10) также нужно учесть взаимодействие цугов, однако оно имеет некогерентный характер.

§ 3. Модель лазера

Простейшая модель одномодового лазера представляет собой квантовый осциллятор с частотой ω_0 , резонансно взаимодействующий с системой N двухуровневых атомов с частотой перехода ω_{ab} . Такой модели соответствует известный спиновый гамильтониан ($\hbar=1$):

$$H = \omega_0 a^\dagger a + \sum_i \frac{1}{2} \omega_{ab} (1 + \sigma_3^i) + g \sum_i (a^\dagger \sigma^i + a \sigma^i), \quad (11)$$

где a^\dagger , a — операторы рождения и уничтожения фотона, σ^+ , σ , σ_3 — матрицы Паули атома. Предполагается, что атомы неподвижны, находятся в одинаковых условиях и константа связи g не зависит от координаты атома; $g = d \sqrt{\omega_0/2V}$, d — дипольный момент перехода. В дальнейшем для простоты мы ограничимся случаем точного резонанса $\omega_0 = \omega_{ab}$. Для краткости при выводе основных кинетических уравнений будем опускать операторы релаксации поля и среды; их легко восстановить в окончательных уравнениях. Чтобы, однако, не терять связь со стационарной картиной, которая существенно зависит от соотношения параметра ν и τ , заметим, что при стационарной генерации выполняется уравнение баланса

$$2\nu\bar{n} = \frac{N - N_{\text{пор}}}{\tau}.$$

В случае $\nu\tau \ll 1$ имеем неравенство $\bar{n} \gg N$ при $\eta - 1 \gtrsim 1$, т. е. энергия системы сосредоточена в основном в электромагнитном поле. Поэтому задачу о взаимодействии атомов с полем можно рассматривать в приближении «заданного» поля: первоначально заданная энергия поля существенно не изменяется. При $\nu\tau \gtrsim 1$ имеем $\bar{n} \lesssim N$, и задачу нужно рассматривать в приближении самосогласованного поля, поскольку энер-

гия поля существенно изменяется во время взаимодействия с атомами.

Таким образом, критерием самосогласованного поля служит неравенство $\bar{n} \leq N$.

§ 4. Уравнения движения в представлении когерентных состояний

В квазиклассической области естественно использовать представление когерентных состояний, так как в этом представлении легко отделить большую среднюю часть поля от малой флуктуирующей части. Ниже мы рассмотрим решение квантовой задачи, полученное разложением по квазиклассическому параметру $1/\sqrt{\bar{n}}$. Ввиду больших \bar{n} такое решение практически можно считать точным.

Чтобы перейти к $|z\rangle$ -представлению

$$a|z\rangle = z|z\rangle, \quad z = x + iy, \quad (12)$$

запишем матрицу плотности всей системы (атомы + поле) в диагональной форме [2]

$$R(t) = \int d^2z R(t, z) |z\rangle \langle z|, \quad (13)$$

$$\text{Sp}(R(t)) = \int d^2z \langle R(t, z) \rangle_{1,2,\dots,N} = 1.$$

Здесь и далее символ $\langle \dots \rangle_{1,2,\dots,N}$ означает след по переменным 1, 2, ..., N атомов. Подставим теперь (13) в уравнение для матрицы плотности

$$i \frac{\partial R}{\partial t} = [H, R], \quad (14)$$

$$H = g \sum_i (a^\dagger \sigma^i + a \sigma^{i\dagger}),$$

где мы использовали условие точного резонанса и перешли в представление взаимодействия.

Умножим уравнение (14) слева и справа на некоторый произвольный вектор $|z'\rangle$ и используем соотношение ортогональности $|\langle z|z'\rangle|^2 = e^{-|z-z'|^2}$. После

интегрирования по частям получим уравнение для $R(t, z)$

$$i \frac{\partial R}{\partial t} = \mathcal{H}R - R\mathcal{H}^+, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \quad (15)$$

$$\mathcal{H}_0 = \sum_i h_i, \quad h_i = g(z^* \sigma^i + z \sigma^{+i}), \quad (16)$$

$$\mathcal{H}_1 = -g \sum_i \sigma^i \nabla, \quad \nabla = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (17)$$

В новом представлении гамильтониан \mathcal{H} неэрмитов, так как преобразование к z -представлению неунитарно.

Эрмитова часть гамильтониана \mathcal{H}_0 описывает, очевидно, взаимодействие атомов с классическим полем z . При этом происходит только некоторое колебание атомных диполей, а энергия поля не изменяется.

Неэрмитова часть \mathcal{H}_1 описывает процессы излучения и поглощения фотонов в системе. На первый взгляд, $\mathcal{H}_1/\mathcal{H}_0 \sim 1/|z|^2 \sim 1/\bar{n}$. На самом деле эта оценка не правильна.

Действительно, в квазиклассической области матрицу плотности $R(t, z)$ в главном порядке можно выразить через матрицы плотности отдельных атомов $r_i(t, z)$ и весовую функцию поля $\rho(t, z)$ в факторизованном виде

$$R(t, z) \approx \rho(t, z) r_1(t, z) r_2(t, z) \dots r_N(t, z). \quad (18)$$

Сравнивая результат действия \mathcal{H}_0 и \mathcal{H}_1 на матрицу плотности (18), мы увидим, что при действии на атомные переменные можно записать $\mathcal{H}_1/\mathcal{H}_0 \sim N/|z|^2$, а при действии на переменные осциллятора получаем $\mathcal{H}_1/\mathcal{H}_0 \sim \sim 1/\rho(\partial\rho/\partial|z|^2)$. Таким образом, гамильтониан описывает эффекты двух типов: эффекты самосогласованного поля порядка $N/|z|^2$ и эффекты квантовой диффузии на плоскости порядка $1/|z|$ (для распределения, близкого к распределению Пуассона).

В дальнейшем эффекты самосогласованного поля будут учтены точно, а квантовые диффузионные эффекты — по теории возмущений.

§ 5. Получение замкнутой системы уравнений

Представление R в виде (18) является неточным, поскольку оно не учитывает корреляционных эффектов. Чтобы их последовательно учесть, составим боголюбовскую цепочку уравнений для первых основных функций распределения

$$\begin{aligned} \rho(t, z) &= \langle R(t, z) \rangle_{1, 2, \dots, N}, \\ \rho(t, z) r_1(t, z) &= \langle R(t, z) \rangle_{2, 3, \dots, N}, \\ \rho(t, z) r_{12}(t, z) &= \langle R(t, z) \rangle_{3, 4, \dots, N} \end{aligned} \quad (19)$$

где r_1 и r_{12} — нормированные одно- и двухчастичные матрицы плотности атомов

$$\langle r_1 \rangle = 1, \quad \langle r_{12} \rangle = r_1.$$

В классическом пределе r_1 не зависит от ρ и корреляционные эффекты отсутствуют: $r_{12} = r_1 r_2$. Если учесть квантовые эффекты, то r_1 зависит от $\nabla \rho / \rho$ и в r_{12} появляется малая квантовая добавка. Взяв в (15) след по всем атомным переменным, получим уравнение для ρ . Оно имеет вид уравнения непрерывности

$$i \frac{d\rho}{dt} + (\nabla v - \text{компл. сопр.}) \rho = 0, \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{i} (v \nabla - \text{компл. сопр.}), \quad v = gN \langle \sigma r \rangle.$$

Комплексный ток излучения v аналогичен скорости течения жидкости с плотностью $\rho(t, z)$ в плоскости z . Подобным образом получаем уравнение для одночастичной матрицы

$$i \frac{dr_1}{dt} + [h, r_1] = g (\bar{\sigma} r_1 + N \langle \sigma^{(2)} \delta r_{12} \rangle_2) \nabla \ln \rho - \text{эрмит. сопр.}, \quad (21)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma - \langle \sigma r \rangle.$$

Здесь введена двухчастичная корреляционная матрица δr_{12} :

$$r_{12} = r_1 r_2 + \delta r_{12}, \quad \langle \delta r_{12} \rangle_1 = \langle \delta r_{12} \rangle_2 = 0.$$

Отношение правой части (21) к $[hr]$ дает малый параметр задачи $1/\rho (\partial \rho / \partial |z|^2)$. Отметим, что след от правой

части (21) равен нулю, так как $\langle \bar{\sigma} \rangle = 0$. Физически это связано с тем, что флуктуации поля на рабочей частоте перехода не изменяют суммарной вероятности заселения верхнего и нижнего рабочих уровней. Поэтому нормировка одночастичной матрицы плотности r сохраняется.

Так как δr_{12} входит в (21) в виде малой квантовой поправки, то при вычислении δr_{12} мы можем не учитывать квантовые поправки порядка $\rho^{-1}(\partial\rho/\partial|z|^2)$. Отбрасывая такие малые члены, получаем для δr_{12} уравнение, не содержащее новых корреляционных функций:

$$\frac{1}{i} \frac{d\delta r_{12}}{dt} + [h_1 + h_2, \delta r_{12}] = gN \langle \sigma^{(3)} (\delta r_{13} \nabla r_2 + \delta r_{23} \nabla r_1) \rangle + \\ + g (\bar{\sigma}^{(1)} r_1 \nabla r_2 + \bar{\sigma}^{(2)} r_2 \nabla r_1) - \text{эрмит. сопр.} \quad (22)$$

Мы имеем теперь замкнутую систему уравнений (20) — (22) для весовой функции ρ одночастичной матрицы плотности r_1 и корреляционной матрицы плотности δr_{12} . Подчеркнем, что замыкание было проведено по квазиклассическому параметру $1/\sqrt{\bar{n}}$. Из последнего уравнения легко оценить порядок корреляционной функции

$$\delta r_{12} \sim \frac{r_1 r_2}{|z|^2}. \quad (23)$$

В сильном поле коррелятор убывает обратно пропорционально числу фотонов. Такую зависимость можно понять из следующих соображений. Пусть некоторый атом излучает фотон, второй атом его поглощает, а затем вновь излучает. Тогда если первый атом взаимодействует с этим фотоном, то между двумя атомами возникнет корреляция. Вероятность того, что первый атом взаимодействует именно с этим фотоном, есть $1/\bar{n}$, что согласуется с (23).

Таким образом, корреляция в спонтанном излучении двух атомов в сильном поле мала. Однако такая корреляция распространяется на весь объем, занимаемый полем и средой. Поэтому в уравнении (21) корреляционная функция δr_{12} умножена на N , и критерий корреляционных эффектов совпадает с критерием самоогласованного поля $N \gtrsim |z|^2$.

Система уравнений (20)–(22) была получена в работе [3]. Дальнейший анализ квантовой задачи сводится к решению этой системы с учетом операторов релаксации.

§ 6. Статистические свойства излучения

Изучение статистических свойств излучения лазера сводится к определению трех основных характеристик: а) функции распределения фотонов, б) ширины линии излучения и в) временной корреляции фотонов. Характерные типы лазеров, указанных в § 2, удобно обсудить по отдельности.

1. Рассмотрим сначала случай (8), соответствующий газовому лазеру. Так как эффекты самосогласованного поля при этом малы ($N/|z|^2 \sim \nu\tau \ll 1$), то корреляционную матрицу δr_{12} в уравнении (21) можно опустить.

Учитывая, что поле изменяется медленно, за время порядка $1/\nu$, уравнение (21) можно использовать в квазистационарном приближении. Опуская индекс 1, имеем

$$\frac{r - r_0}{\tau} = \frac{1}{i} [h, r] + ig (\tilde{\sigma} r \nabla \ln \rho - \text{компл. сопр.}). \quad (24)$$

Это уравнение описывает корреляцию в состояниях атома и квантового осциллятора. Оператор $\tilde{\sigma}$ есть оператор флуктуации тока излучения. Он служит множителем при $\nabla \rho$ в уравнении (24) и определяет коэффициент диффузии поля на плоскости z в уравнении диффузии для весовой функции $\rho(t, z)$. Положение здесь точно такое же, как в случае броуновской частицы, находящейся во внешнем поле. Если $x(t)$ — случайная координата частицы, то коэффициент диффузии определяется средним

$$\frac{\langle (x(t) - \langle x(t) \rangle)^2 \rangle}{2t}. \quad (25)$$

Аналогичным образом выражается и коэффициент диффузии поля через $\tilde{\sigma}$. Средний ток излучения атома $\langle \sigma \rangle$ мал в слабом и сильном полях (вследствие эффекта насыщения). Поэтому отличие $\tilde{\sigma}$ от σ может стать существенным только при промежуточных энергиях, когда эффект насыщения порядка единицы.

При выводе уравнений (20)—(22) матрица плотности атома считалась двухрядной и нормированной на единицу $\langle r \rangle = 1$.

Если в атоме, помимо рабочих уровней a и b , нужно учесть и другие состояния, например основное, то матрица r обладает более высокой размерностью и след по двум рабочим уровням $\text{Sp}_{a,b}(r) = r_{aa} + r_{bb}$ меньше единицы. В этом случае $\bar{\sigma}$ имеет вид

$$\bar{\sigma} = \sigma - \frac{\text{Sp}_{ab}(\sigma r)}{\text{Sp}_{ab}(r)}. \quad (26)$$

При этом все матрицы, относящиеся к уровням a и b , следует считать умноженными на проекционный оператор, равный единице при действии на состояния a и b и равный нулю во всех остальных случаях.

В силу определения (26) след от правой части (24) по рабочим состояниям a и b равен нулю. Это связано с тем, что взаимодействие с резонансным полем не может изменить суммарной заселенности уровней a и b ; она может измениться только за счет переходов в другие состояния. Это можно учесть, видоизменяя оператор релаксации $1/\hat{t}$. В дальнейшем для простоты будем по-прежнему считать атом двухуровневым.

Отметим, что уравнение Скалли и Лэмба (см. лекцию Скалли в данном сборнике) для совместной матрицы плотности, будучи записано в представлении когерентных состояний, совпадает с (24), за исключением того, что вместо $\bar{\sigma}$ стоит σ . Это отличие связано, видимо, с тем, что в теории Скалли и Лэмба уравнение для совместной матрицы плотности получено в приближении бесконечно большого времени жизни фотона в резонаторе. Для нахождения классического тока излучения это приближение, безусловно, достаточно. Однако для нахождения квантовых флуктуаций, вообще говоря, нужно учитывать конечность времени жизни фотона в резонаторе, поскольку флуктуации фотонов в результате выхода из резонатора имеют примерно ту же величину, что и за счет спонтанного излучения атомов.

Уравнение (24) легко решить, рассматривая последнее слагаемое как малое возмущение. Подставляя результат такого приближенного решения в уравнение

непрерывности (20), получаем уравнение Фоккера — Планка для ρ . В цилиндрических координатах

$$z = \sqrt{\xi} e^{i\varphi}, \quad z^* = \sqrt{\xi} e^{-i\varphi} \quad (27)$$

оно имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 2\nu \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(A\rho + B \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right) + \frac{C}{\xi^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi^2} \right], \quad (28)$$

$$A = \xi \left[1 - \eta(1 + 4(g\tau)^2 \xi)^{-1} \right],$$

$$B = \frac{\xi}{\eta^2}, \quad C = \frac{\xi}{8} (1 + \eta).$$

Легко найти стационарное решение этого уравнения $\rho_0(\xi)$. Рассмотрим это решение в трех характерных областях: ниже порога, на пороге и выше порога генерации.

Ниже порога, при $\eta < 1$, имеем планковское распределение

$$\rho_0(\xi) = \frac{1}{\bar{n}} e^{-\xi/\bar{n}}, \quad \bar{n} = \frac{1}{1-\eta}, \quad (29)$$

$$\overline{\Delta n^2} = \bar{n}(\bar{n} + 1) \approx \bar{n}^2.$$

На пороге, при $\eta = 1$, получаем гауссово распределение

$$\rho_0(\xi) = \frac{2}{\pi \bar{n}} e^{-\xi^2/\pi \bar{n}^2}, \quad \bar{n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi g\tau}}, \quad (30)$$

$$\overline{\Delta n^2} = \bar{n}^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).$$

Случаи (29) и (30) относятся к области малых энергий излучения. Как отмечалось, здесь $\tilde{\sigma} \approx \sigma$ и результаты совпадают с результатами Скалли и Лэмба и других авторов.

Выше порога, при $\eta > 1$, имеем следующее распределение:

$$\rho_0(\xi) = (2\pi d\bar{n})^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{(\xi - \bar{n})^2}{2d\bar{n}} \right\}, \quad (31)$$

$$\bar{n} = \frac{\eta - 1}{(2g\tau)^2}, \quad (32)$$

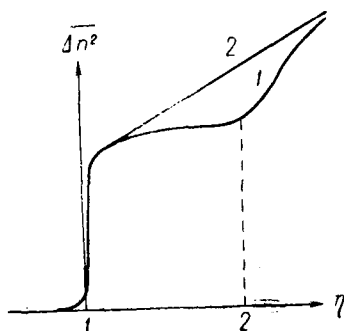
$$\frac{\overline{\Delta n^2}}{\bar{n}} = \frac{\eta}{\eta - 1} - \frac{1}{\eta}. \quad (33)$$

Последнее слагаемое обусловлено отличием $\tilde{\sigma}$ от σ . Как отсюда видно, наибольший относительный вклад

от поправки $1/\eta$ имеет место при $\eta = 2$ и составляет 25%. В случае быстро распадающегося нижнего уровня $\tau_b \ll \tau_a$ все уравнения сохраняют свой вид, кроме уравнения (33):

$$\frac{\overline{\Delta n^2}}{\bar{n}} = \frac{\eta}{\eta - 1} - \frac{1}{2\eta}. \quad (34)$$

Качественно зависимость дисперсии фотонов от параметра генерации показана на фиг. 2. Отличие от линей-



Фиг. 2. Зависимость дисперсии $\overline{\Delta n^2}$ от параметра генерации η .

Резкое нарастание дисперсии до величины $(\overline{\Delta n_0})^2 = (4 \cdot (g\tau)^2)^{-1}$, характерной для классической области, происходит в очень узком интервале $|\eta - 1| \sim g\tau$. Кривая 1 соответствует точному решению [формула (33)]; кривая 2 — приближенному решению при $\bar{\sigma} = \sigma$ [первый член формулы (33)].

ной зависимости дисперсии фотонов в классической области генерации связано с немонотонностью функции $W_{\text{сп}}(\eta)$ (фиг. 1). Формулы для общего случая приведены в Приложении.

Для нахождения ширины линии генерации следует вычислить коррелятор

$$K(t) = \overline{a^\dagger(t) a(0)}. \quad (35)$$

Если пренебречь амплитудными флуктуациями, то, как показано в лекциях Скалли, $K(t) \sim e^{-\Delta \nu t}$ затухает, как и первая гармоника Фурье весовой функции $\rho(t, z)$:

$$\rho(t, z) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_m(t, \xi) e^{-im\phi}, \quad (36)$$

$$\rho_1(t, \xi) = \text{const} \cdot \rho_0(\xi) e^{-\Delta \nu t}.$$

Из уравнения (28) находим декремент затухания $\Delta\nu$. Ограничиваясь областью выше порога, имеем

$$\Delta\nu = \frac{1 + \eta}{4\bar{n}} \nu. \quad (37)$$

Вблизи порога справедлива формула Таунса $\Delta\nu \approx \nu/2\bar{n}$, вдали от порога ширина линии выходит на постоянный предел $\Delta\nu \approx \nu(g\tau)^2$.

Амплитудные флуктуации становятся существенными в крыльях спектральной линии. Полагая $a \sim e^{i\varphi} \sqrt{\bar{n}}$, приближенно можно написать

$$K(t) = \bar{n} e^{i\delta\varphi(t)} \left(1 + \frac{\overline{\Delta n(t) \Delta n(0)}}{4\bar{n}^2} \right). \quad (38)$$

Первый множитель есть $e^{-\Delta\nu t}$, второй множитель описывает временную корреляцию интенсивностей. В газовом лазере вблизи порога имеем

$$\overline{\Delta n(t) \Delta n(0)} = \overline{\Delta n^2} e^{-\Gamma t}, \quad \Gamma = 2\nu(\eta - 1). \quad (39)$$

В результате для спектральной функции $K(\omega)$ получаем

$$K(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega t} K(t) dt = \frac{\nu}{2\pi} \left[\frac{1}{\omega^2 + (\Delta\nu)^2} + \frac{1}{\omega^2 + \Gamma^2} \right]. \quad (40)$$

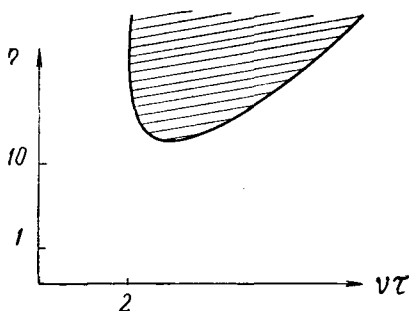
Таким образом, в далеких крыльях ($\omega \geq \Gamma$) фазовые и амплитудные флуктуации дают одинаковый вклад.

В заключение отметим, что различные теории для режима вблизи порога генерации дают совпадающие результаты. При средних энергиях излучения, когда эффект насыщения порядка единицы, нужно учитывать уменьшение вероятности спонтанного излучения атомов. В результате этого флуктуации фотонов несколько уменьшаются.

2. Рассмотрим второй тип лазера, определенный соотношениями (9). В этом случае $\sigma\tau$ больше длины свободного пробега фотона c/ν . Поэтому электромагнитный пучок, испущенный атомом, взаимодействует одновременно с несколькими другими атомами. В спонтанном излучении атомов возникает некоторая корреляция и для

ее учета необходимо вычислить корреляционную функцию δr_{12} .

В этом случае происходит «пленение» излучения: фотон, испущенный одним атомом, не успев сформироваться, поглощается другим атомом. Энергия при этом сосредоточена в основном в возбужденных атомах. Доля энергии, приходящейся на фотоны, порядка $1/\nu\tau$.



Фиг. 3. Область неустойчивости стационарной одномодовой генерации (заштрихована), определяемая уравнением (44).

Обычно критерий «пленения» формулируется как условие, налагаемое на плотность возбужденных атомов

$$\frac{N}{V} \lambda^2 c \tau \gtrsim 1. \quad (41)$$

В качестве сечения поглощения фотона здесь принята величина λ^2 , где λ — длина волны фотона. В слабом поле $N \approx N_{\text{пор}} = \nu/g^2\tau$. Отсюда, считая ширину линии естественной, опять получаем критерий $\nu\tau \gtrsim 1$.

В сильном поле сечение поглощения убывает примерно как $1/\eta$, а число атомов растет как $N = \eta N_{\text{пор}}$. Поэтому критерий «пленения» не зависит от энергии поля.

В сильном поле стационарная генерация становится неустойчивой. Анализ на устойчивость [4, 5] показывает, что вне заштрихованной области на диаграмме $\eta, \nu\tau$ (фиг. 3) стационарная генерация устойчива. Внутри заштрихованной области генерация происходит в колебательном режиме.

Приведем решение стационарной квантовой задачи в той области параметров, в которой генерация является устойчивой.

Выше порога генерации мы имеем весовую функцию (31) с параметром дисперсии

$$d = (\eta - 1)^{-1} \frac{2 + \nu\tau + 2\nu\tau\eta(\eta - 1)}{4\nu\tau + (\nu\tau)^2 + (2 - \nu\tau)\eta}. \quad (42)$$

Вблизи порога ($\eta - 1 \ll 1$) это выражение упрощается:

$$d = (\eta - 1)^{-1} (1 + \nu\tau)^{-1}. \quad (43)$$

Знаменатель в формуле (42) обращается в нуль на кривой

$$\eta_c = \frac{\nu\tau(\nu\tau + 4)}{\nu\tau - 2}, \quad (44)$$

которая является границей области неустойчивости. Отсюда видно, что флуктуации вблизи порога уменьшаются по сравнению с флуктуациями в газовом лазере примерно в $(1 + \nu\tau)$ раз, а около границы области неустойчивости сильно возрастают.

Физически это можно интерпретировать следующим образом. Рассмотрим два диполя 1 и 2, удаленных друг от друга на расстояние порядка длины свободного пробега фотона. Если диполь 1 излучил волну с фазой φ , то диполь 2 в случае точного резонанса ($\omega_0 = \omega_{ab}$) имеет фазу колебаний $\varphi + \pi/2$, а излученный им цуг будет иметь фазу $\varphi + \pi$. Рассеянное излучение ослабляет падающее. Результирующее излучение будет ослаблено тем больше, чем выше степень перекрытия цугов, т. е. чем больше параметр когерентности $\nu\tau$. В этом смысл множителя $(1 + \nu\tau)^{-1}$ в формуле (43).

Подчеркнем, что речь здесь идет о спонтанно излученных цугах, так как в вынужденном излучении цуги, испущенные разными атомами, имеют одинаковые фазы. В сильном поле E происходит расщепление энергии атомных состояний, и между атомными диполями появляется расстройка порядка dE . При $dE > (\nu/\tau)^{1/2}$ рассеяние электромагнитного цуга на атоме носит нерезонансный характер, так что результирующий сдвиг фазы

близок к 0 или 2π . Таким образом, рассеянное излучение усиливает падающее и флуктуации могут стать аномально большими. Легко видеть, что условие $dE = (v/\tau)^{1/2}$ совпадает с границей области неустойчивости при больших полях (фиг. 3).

В малой окрестности области неустойчивости $\eta - \eta_c \sim 1/\sqrt{\bar{n}}$ относительные флуктуации порядка единицы: $\Delta n^2 \sim \bar{n}^2$. Поэтому формула (42), полученная по теории возмущений, становится неприменимой. Ширина линии излучения в области устойчивости имеет вид

$$\Delta v = \frac{v(1 + \eta)}{4\bar{n}(1 + v\tau)}. \quad (45)$$

При малых значениях $v\tau$ мы имеем формулу для газового лазера, а при больших $v\tau$

$$\Delta v = \frac{1 + \eta}{4\bar{n}\tau}, \quad (46)$$

т. е. ширина спектральной линии определяется временем жизни атома.

Рассмотрим теперь корреляцию интенсивностей. Вблизи порога по-прежнему справедлива формула (39) с $\Gamma = 2v(\eta - 1)(1 + v\tau)^{-1}$. При $v\tau \gg 1$ получаем $\Gamma = (2/\tau)(\eta - 1)$, т. е. при возрастании τ происходит сужение спектра амплитудных флуктуаций.

С возрастанием энергии в корреляторе $\overline{\Delta n(t)\Delta n(0)}$ появляются осцилляции. Вблизи границы области неустойчивости при $\eta \approx \eta_c$ затухание стремится к нулю [6]:

$$\overline{\Delta n(t)\Delta n(0)} = \overline{\Delta n^2(0)} \cos \omega_c t, \quad (47)$$

$$\omega_c^2 = \frac{v}{\tau} (\eta_c - 1) \left(1 + \frac{v\tau}{2}\right)^{-1}.$$

При больших $v\tau$ частота осцилляций совпадает с частотой прецессии атома в сильном поле $\omega_c \sim dE$.

3. Рассмотрим третий тип лазера, определенный условиями (10). В этом случае также происходит перекрытие цугов $c\tau > c/v$. Однако фазовая корреляция сохраняется только в пределах $c\tau_{ab} \ll c\tau$. Поэтому можно говорить лишь о некогерентном взаимодействии цугов.

Приведем выражение для дисперсии фотонов выше порога генерации:

$$\frac{\overline{\Delta n^2}}{\bar{n}} = \frac{\eta}{\eta - 1} - \frac{1}{2\eta} + \nu\tau \frac{\eta + 1}{\eta}. \quad (48)$$

Здесь первые два слагаемых соответствуют формуле (34), последнее слагаемое обусловлено коллективными эффектами. Параметр $\nu\tau$ может быть очень большим, порядка $10^4 - 10^5$ для рубинового и CO_2 -лазеров. Поэтому уровень флуктуаций уже при небольшом превышении над порогом определяется параметром $\nu\tau$.

Вдали от порога относительные флуктуации стремятся к постоянному пределу

$$\frac{(\overline{\Delta n})^2}{\bar{n}} = \nu\tau. \quad (49)$$

Это соотношение можно понимать следующим образом: фотонный пучок разбит на группы, состоящие из скоррелированных между собой фотонов. Отдельные группы фотонов можно считать независимыми, распределенными по Пуассону.

Ширина линии выше порога определяется формулой (37) для газового лазера, т. е. эффекты самосогласованного поля при некогерентном сложении цугов не дают вклада в диффузию фазы.

Корреляция интенсивностей в данном случае описывается суммой двух экспонент с декрементами

$$\Gamma_{1,2} = \frac{\eta}{2\tau} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8\nu\tau(\eta - 1)}{\eta^2}} \right). \quad (50)$$

При больших $\nu\tau$ здесь возможны такие случаи. Около самого порога при $\nu\tau(\eta - 1) \ll 1$ нужно удержать экспоненту с наименьшим декрементом $\Gamma \approx 2\nu(\eta - 1)$, т. е. имеем случай (39). Когда выполняется неравенство $8\nu\tau(\eta - 1) > 1$, то коррелятор перестает быть монотонным, в нем появляются осцилляции с частотой порядка $\omega_c \sim \sqrt{(2\nu/\tau)(\eta - 1)}$.

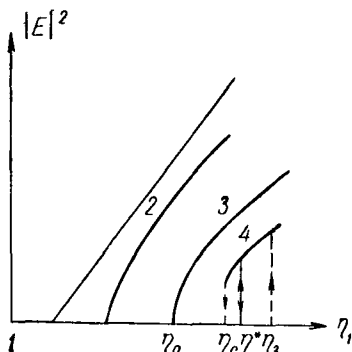
В этом случае в спектре флуктуаций интенсивности возникает пик на частоте ω_c . Случай 3 изучался в работах [7—10]. Пик в спектре флуктуаций и зависимость

$\omega_c \sim \sqrt{\eta - 1}$, предсказанные в [7], наблюдались в работе [11].

Дальше мы рассмотрим некоторые простые применения общей теории к конкретным вопросам.

§ 7. Лазер с нелинейной поглощающей ячейкой

Газовый лазер с нелинейной поглощающей ячейкой экспериментально изучался в работах [12, 13]. В этих опытах в резонатор Фабри — Перо вместе с активной



Фиг. 4. Зависимость энергии излучения от η в нелинейном лазере.

He — Ne-ячейкой вводилась поглощающая ячейка с неон. С ростом поглощения график мощности излучения $|E|^2$ от η ведет себя примерно так, как показано на фиг. 4 [12].

Прямая 1 соответствует обычному лазеру. При малом, но конечном поглощении график мощности отклоняется от линейного закона. Далее, при некотором критическом поглощении график мощности имеет вид (кривая 3)

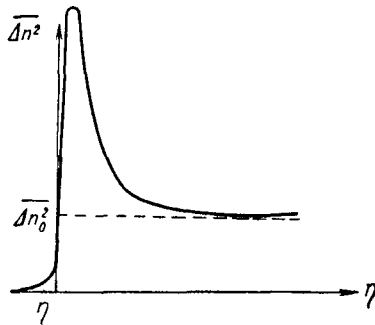
$$E^2 \sim \sqrt{\eta - \eta_0}.$$

При дальнейшем возрастании поглощения появляется гистерезис: с возрастанием η зажигание происходит при $\eta = \eta_3$, а с уменьшением η срыв происходит при $\eta = \eta_c$.

Классическая теория лазера с нелинейным погло-

шением рассматривалась в [14], а квантовая — в [15]. В окрестности порога гистерезиса линсый эффект насыщения мал и нужно учитывать квадратичный.

Отметим некоторые особенности флуктуаций по сравнению с флуктуациями в обычном лазере. Наиболее существенные изменения происходят на пороге гистерезиса при $\eta \approx \eta_0$ и вблизи точки срыва генерации.



Фиг. 5. Зависимость дисперсии от η в критической точке (сплошная кривая).

Пунктиром показана дисперсия $\overline{\Delta n_0^2}$ в обычном лазере. $\overline{\Delta n_{\text{макс}}^2} \approx (g\tau)^{-2/3} (\overline{\Delta n_0^2})^2 \approx (10^2 - 10^3) (\overline{\Delta n_0^2})^2$. Нарастание дисперсии происходит в очень узкой области $|\eta - \eta_0| \sim (g\tau)^{1/3}$, а убывание — по закону $(\eta - \eta_0)^{-1/2}$.

Дисперсия фотонов на пороге гистерезиса (критическая точка) схематически показана на фиг. 5. В этом случае в дисперсии имеет место резко выраженный максимум. В окрестности точки срыва для дисперсии фотонов выполняется соотношение

$$\overline{(\Delta n)^2} \sim \frac{(\overline{\Delta n_0^2})^2}{\sqrt{\eta - \eta_c}}, \quad (51)$$

где $\overline{(\Delta n_0^2)}$ — дисперсия фотонов вблизи порога в обычном лазере.

При подходе к точке срыва наблюдается довольно сильное возрастание дисперсии. При очень малых значениях $\eta - \eta_c$ формула (51) неверна. Чтобы получить правильный порядок дисперсии в точке срыва, нужно

положить $\eta - \eta_c \sim (g\tau)^{1/3}$, так что $\overline{(\Delta n_c)^2} \sim \overline{(\Delta n_0)^2} (g\tau)^{-2/3}$. Типичный порядок $g\tau$ составляет $10^3 - 10^4$. Поэтому дисперсия в точке срыва возрастает по сравнению с обычным лазером примерно в $10^2 - 10^3$ раз. Увеличение флуктуаций в точке срыва проявляется в увеличении разброса времен выключения лазера. Этот эффект наблюдался в работе [16].

Возрастание флуктуаций в точке срыва связано с уменьшением декремента затухания малых возмущений, который пропорционален величине $\partial\chi(E)/\partial E$. Нетрудно убедиться в том, что эта величина стремится к нулю в точке срыва.

По этой же причине при значениях η , близких к η_c , аномально увеличивается время корреляции интенсивностей

$$\Gamma \sim \Gamma_0 \sqrt{\eta - \eta_c}, \quad (52)$$

где Γ_0 — декремент затухания в обычном лазере при такой же интенсивности, как и в нелинейном лазере.

На самом деле состояние с генерацией около точки срыва является метастабильным. Его время жизни T_c сильно зависит от близости к величине η_c :

$$T_c \sim \nu^{-1} \exp\left\{\frac{4}{3} (g\tau)^{-2} (\eta - \eta_c)^{3/2}\right\}. \quad (53)$$

Аналогично при возрастании η и приближении к η_3 быстро увеличивается вероятность спонтанного появления генерации. Для времени жизни метастабильного состояния без генерации T_3 имеем

$$T_3 \sim \nu^{-1} \exp\left\{\frac{1}{4} (g\tau)^{-2} (\eta_3 - \eta)^{3/2}\right\}. \quad (54)$$

Вблизи точки срыва $T_c \ll T_3$ и, наоборот, вблизи точки зажигания $T_3 \ll T_c$. При некотором значении $\eta = \eta^*$ имеем $T_c(\eta^*) = T_3(\eta^*)$, откуда находим

$$\eta^* \approx -0,7 (\eta_3 - \eta_c) + \eta_c. \quad (54a)$$

При $\eta = \eta^*$ состояния с генерацией и без генерации становятся равновероятными. Поэтому при очень мед-

ленном изменении параметра генерации [за время порядка $T(\eta^*)$] гистерезис исчезает — генерация появляется и исчезает при $\eta = \eta^*$. На фиг. 4 этот переход изображен сплошной линией. Таким образом, при медленном изменении η мы имеем дело с фазовым переходом первого рода. Рассмотренный способ определения η^* полностью соответствует известному правилу фаз Максвелла.

Что произойдет, если зафиксировать η точно в точке η^* ? Очевидно, что генерация будет происходить в пульсирующем режиме. Такие пульсации носят случайный характер. Оценим значения параметров, при которых можно было бы наблюдать эти пульсации. Так, при $\nu \sim 10^6$ Гц, $(g\tau)^2 \sim 10^{-6}$ и $\eta_s = \eta_c = 2 \cdot 10^{-3}$ имеем $T(\eta^*) = 1$ с. Отсюда следует, что для наблюдения пульсаций нужно иметь достаточно большие параметры насыщения $(g\tau)^2 \sim 10^{-6}$ и уметь фиксировать параметр генерации η с точностью порядка $2-3 \cdot 10^{-3}$.

В заключение отметим, что фиг. 4 соответствует картине фазового перехода жидкость — газ вблизи критической точки. При этом энергия излучения соответствует объему, а η — давлению.

§ 8. Модель лазера с аномально большими флуктуациями фазы

Существуют ли условия, при которых сильно возрастают флуктуации частоты? Покажем, что такие условия существуют.

Рассмотрим газовый лазер с поглощающей ячейкой, которая обладает следующими свойствами: 1) частоты резонатора, активной и пассивной ячеек совпадают; 2) доплеровский контур в пассивной ячейке уже, чем в активной $kv_1 > kv_2$; 3) параметр насыщения в пассивной ячейке меньше, чем в активной.

Последнее условие позволяет считать, что полный коэффициент усиления монотонно меняется с изменением энергии поля. Поэтому здесь отсутствуют нелинейные эффекты по полю, рассмотренные в § 6. По этой причине, считая поле слабым, его можно не учитывать при рассмотрении частотных эффектов.

В нулевом приближении по полю вещественная χ' и мнимая χ'' части поляризуемости имеют вид

$$\begin{aligned}\chi' &= v(\eta_1 - \eta_2 - 1), \\ \chi'' &= a\delta + b\delta^3, \quad \delta = \omega - \omega_0, \\ \eta_i &= \frac{\sqrt{\pi} g^2 N_i}{kv_i v}, \quad \varepsilon_i = \frac{2v}{\sqrt{\pi} kv_i} \quad (i = 1, 2), \\ a &= 1 + \eta_1 \varepsilon_1 - \eta_2 \varepsilon_2, \quad b = -\frac{\pi}{6} (\eta_1 \varepsilon_1^3 - \eta_2 \varepsilon_2^2).\end{aligned}\tag{55}$$

Индекс 1 относится к активной ячейке, 2 — к пассивной. Ширина линии излучения пропорциональна a^{-2} . В газовом лазере величина a обычно близка к единице. Сейчас, однако, нас будет интересовать случай, когда a обращается в нуль. Найдем критические значения параметров η_1^0 и η_2^0 , при которых одновременно выполняются условия $\chi' = 0$ и $a = 0$:

$$\eta_1^0 = \frac{1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}, \quad \eta_2^0 = \frac{1 + \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}.$$

По предположению, $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. При малых ε оба параметра η_1 и η_2 велики и близки друг к другу.

Оценим ширину линии при $a = 0$. Подставляя в уравнение (1) $E(t) = |E| \exp(-i \int dt \delta(t))$, получаем

$$\delta(t) = kv \left(\frac{3 \operatorname{Im} F(t)}{4v |E|} \right)^{1/3},\tag{56}$$

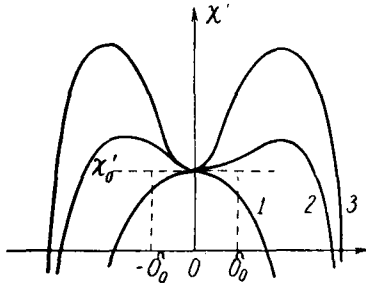
где v — некоторая скорость, заключенная между v_1 и v_2 . Ширина линии определяется соотношением

$$\Delta v = \int_0^\infty dt \delta(0) \delta(t).$$

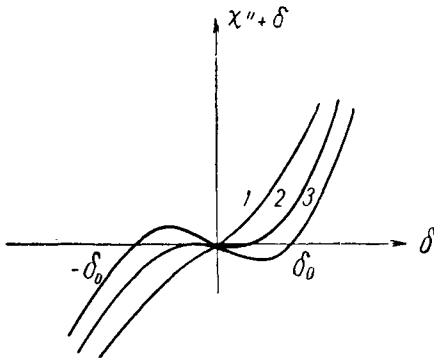
Воспользуемся аппроксимацией $\langle F^{*1/3}(0) F^{1/3}(t) \rangle \approx \langle F^*(0) F(t) \rangle^{1/3}$. В качестве коррелятора случайной силы можно использовать вторую формулу из (1), заменив δ -функцию функцией $1/\tau [\exp(-t/\tau)]$. В результате получим

$$\Delta v \approx (kv)^2 \left(\frac{\tau^2}{v\bar{n}} \right)^{1/3}.\tag{57}$$

Особенность этого выражения заключается в том, что в него входит множитель $\bar{n}^{-1/3}$ вместо \bar{n}^{-1} , как в обычном лазере. Если принять $kv \sim 1/\tau \sim 10^8$ Гц, $\nu \sim 10^7$ Гц,



Фиг. 6. Зависимость вещественной части поляризуемости χ' от расстройки в отсутствие поля. Точка χ'_0 соответствует уровню потерь.



Фиг. 7. Зависимость мнимой части поляризуемости χ'' от расстройки.

$\bar{n} \sim 10^8$, то $\Delta\nu \sim 10^6$ Гц. Довольно близкие условия, видимо, могут быть реализованы в He—Ne-лазере на 3,39 мкм. Малое значение $\nu/kv \sim 0,1$ может быть компенсировано большим превышением над порогом.

Качественно поведение частоты и интенсивности показано на фиг. 6 и 7. Кривым 1, 2 и 3 соответствуют значения $a > 0$, $a = 0$ и $a < 0$. При $a < 0$ дисперсионное уравнение $\chi'' = 0$ имеет три решения: $\delta = 0$ и

$\delta = \pm \delta_0$, и генерация может происходить на одной из этих частот¹⁾. Однако устойчивыми являются только состояния с $\delta = \pm \delta_0$, так как в этих состояниях коэффициент усиления больше (фиг. 6).

§ 9. Дробовые шумы

В некоторых случаях в газовом лазере с квантовыми флуктуациями, обусловленными спонтанным излучением, конкурируют флуктуации, возникающие вследствие дискретного характера возбуждения атомов. Такие флуктуации аналогичны дробовому шуму в ламповом генераторе. Атомы в газовом лазере возбуждаются при столкновении с атомами или электронами за время, малое по сравнению с временем жизни атома. Поэтому полный ток излучения представляет собой совокупность сильно перекрывающихся во времени затухающих токов отдельных атомов, у которых моменты времени возбуждения распределены случайным образом и задана только средняя скорость поступления атомов в единицу времени $\dot{N} = N/\tau$:

$$i = \sum_i gp(t - t_i), \quad (58)$$

где $p = \langle \sigma \dot{r} \rangle$ — средний ток излучения атома.

Дробовые шумы статистически независимы от квантовых. Поэтому их можно вычислять по отдельности.

Ток излучения атома с одним временем релаксации τ , возбужденного при $t = 0$, имеет вид

$$p = \frac{gz}{\kappa^2} \left[-\frac{1}{2} (\Delta + \kappa) e^{i\kappa t} + \frac{1}{2} (-\Delta + \kappa) e^{-i\kappa t} \right] e^{-t/\tau}, \quad (59)$$

где $\kappa^2 = \Delta^2 + 4(gz)^2$; $\Delta = \omega_{ab} - \omega_0$ — расстройка. Дробовой шум приводит к изменению коэффициентов диффузии B и C в уравнении Фоккера — Планка. Связан-

¹⁾ Классическая теория (без учета флуктуаций) лазера с немонотонным дисперсионным контуром в модели двух слабо связанных резонаторов была недавно построена в работе Спенсера и Лэмба [18].

ные с дробовым шумом коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} B' &= \frac{\xi}{4\eta} (\eta - 1), \\ C' &= \frac{\xi}{16\eta} (\eta - 1) (\omega\tau)^2. \end{aligned} \quad (60)$$

Эти формулы относятся только к простейшей модели лазера с однородным уширением. Сравнивая выражения (60) и (28), мы видим, что дробовой шум существен при достаточно большом превышении над порогом. Более подробно этот вопрос рассмотрен в Приложении.

Дополнительным источником дробового шума может стать движение атома в поле стоячей волны [17]. Движущийся атом излучает набор частот, кратных $2kv$. При этом излучение на кратных частотах содержит случайную фазу, поэтому оно дает дополнительный вклад в некогерентную компоненту поля по сравнению со случаем бегущей волны.

§ 10. Заключение

Итак, вопрос о статистических свойствах излучения лазера допускает строго квантовое рассмотрение. Используя естественный малый параметр $1/\sqrt{\bar{n}}$, можно получить замкнутую систему кинетических уравнений. Ввиду большого значения \bar{n} такое решение практически является точным.

Отметим, что окрестность порога генерации может быть также описана феноменологической теорией со случайными силами. Квантовый подход дает здесь те же результаты. Решение квантовой задачи позволяет найти и уточнить свойства излучения при значительных превышениях над порогом для всех типов лазеров.

Наибольший интерес представляет изучение тех случаев, где флуктуации велики: $\overline{\Delta n^2} \gg \bar{n}$. Это происходит при малых декрементах затухания слабых возмущений относительно стационарной генерации. Помимо пороговой области, здесь было указано еще несколько примеров: окрестность области неустойчивости одномодовой генерации, лазер с нелинейной поглощающей ячейкой и лазер с немонотонным дисперсионным контуром,

Изучение лазера с нелинейным поглощением позволяет установить соответствие с теорией фазового перехода жидкость — газ вблизи критической точки.

Показано, что полная теория флуктуаций излучения лазера должна учитывать также и дробовые шумы, возникающие вследствие дискретного возбуждения атомов.

Отметим, что рассмотренную нами простейшую модель лазера можно обобщить на случай неоднородного уширения и на различные типы колебаний поля (бегущая или стоячая волна).

Приложение

Приведем здесь выражение для дисперсии фотонов и ширины линии в случае конечной расстройки $(\omega_0 - \omega_{ab})\tau = \varepsilon$ и конечной заселенности рабочих уровней (N_a — на верхнем уровне, N_b — на нижнем). Ограничиваясь областью выше порога генерации, получаем следующие формулы для газового лазера:

$$\overline{\Delta n^2} = \bar{n} (1 + d),$$

$$d = \frac{N_a (\eta^{-1} + \varepsilon^2) + (\eta - 1) (1 - \eta^{-1} + \varepsilon^2) N_b}{\Delta N (\eta - 1) (1 + \varepsilon^2)},$$

где $\Delta N = N_a - N_b$ — перенаселенность. При $N_b = 0$ имеем

$$\frac{\overline{\Delta n^2}}{\bar{n}} = \frac{\eta}{\eta - 1} - \frac{1}{\eta (1 + \varepsilon^2)}.$$

Второй член в правой части этого выражения, связанный с отличием $\tilde{\sigma}$ от σ , становится малым при больших расстройках. Ширина линии $\Delta \nu$ в общем случае имеет вид

$$\Delta \nu = \frac{v\eta}{4\bar{n}(1 + \varepsilon^2)} \left\{ \frac{1 + \varepsilon^2}{\eta} + \frac{N_a + N_b}{\Delta N} \left[(1 + \varepsilon^2)^2 - \frac{2\varepsilon^2(1 + \varepsilon^2)}{\eta} + \frac{\varepsilon^2(\varepsilon^2 - 1)}{\eta^2} + \frac{2\varepsilon^2}{\eta^2} \right] \right\}.$$

Далее рассмотрим это выражение при $N_b = 0$. При η , близких к единице, имеем формулу Таунса $\Delta \nu = v/2\bar{n}$ и ширина линии зависит от расстройки только через \bar{n} .

При $\eta \gg 1$ имеем

$$\Delta v \approx \frac{v(1 + \epsilon^2)\eta}{4\bar{n}} \approx (g\tau)^2,$$

т. е. ширина линии от расстройки не зависит.

Рассмотрим теперь вклад от дробового шума. Используя коэффициенты диффузии B' и C' [формула (60)], находим

$$\overline{\Delta n^{2'}} = \frac{\bar{n}}{4},$$

$$\Delta v' = \frac{v\epsilon^2(\eta - 1)}{8n\bar{n}}.$$

Так как квантовые флуктуации и дробовой шум статистически независимы, то полные дисперсии фотонов $\overline{\delta n^2}$ и ширина линии δv равны $\overline{\delta n^2} = \overline{\Delta n^2} + \overline{\Delta n^{2'}}$ и $\delta v = \Delta v + \Delta v'$. При этом вклад в дисперсию фотонов становится существенным при $\eta - 1 \gtrsim 1$. При $\eta \gg 1$ $\overline{\delta n^2} = 5/4\bar{n}$, т. е. вследствие дробового шума распределение фотонов несколько отличается от закона Пуассона.

Вклад дробового шума в фазовые флуктуации может быть существенным и вблизи порога, когда выполняются условия $\eta - 1 \ll 1$, $\epsilon^2(\eta - 1) \gtrsim 1$. При $\epsilon^2(\eta - 1) \gg 1$ имеем

$$\delta v \approx \Delta v' = \frac{v\epsilon^2(\eta - 1)}{8\bar{n}} = \frac{1}{2}(g\tau)^2.$$

Таким образом, при больших расстройках около порога генерации ширина линии не зависит ни от ϵ , ни от $\eta - 1$, а определяется только параметром насыщения $(g\tau)^2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Раутиан С. Г., Труды ФИАН, **35**, 43 (1967).
2. Клаудер Дж., Сударшан Э., Основы когерентной оптики, изд-во «Мир», 1970.
3. Казанцев А. П., Сурдутович Г. И., ЖЭТФ, **56**, 2001 (1969).
4. Халдре Х. Ю., Хохлов Р. В., Известия вузов, Радиофизика, т. 1, № 5—6, 60 (1958).
5. Гуртовник А. С., Известия вузов, Радиофизика, т. 1, № 5—6, 83 (1958).
6. Казанцев А. П., ЖЭТФ, **61**, 1790 (1971).
7. McCumber D. E., Phys. Rev., **141**, 306 (1966).

8. *Lax M.*, IEEE, QE-3, 37 (1967).
9. *Климонтович Ю. Л., Ковалев А. С.*, ЖЭТФ, 59, 464 (1970).
10. *Сурдутович Г. И., Титов Е. А.*, Труды II Вавиловской конференции по нелинейной оптике, Новосибирск, 1971.
11. *Raoli T. L., Ripper J. E.*, Phys. Rev., 2A, 2551 (1971).
12. *Лисицын В. Н., Чеботаев В. П.*, ЖЭТФ, Письма, 7, 3 (1968); ЖЭТФ, 54, 419 (1968).
13. *Lee P. H., Skolnick M. L.*, Appl. Phys. Lett., 10, 303 (1967).
14. *Казанцев А. П., Раутиан С. Г., Сурдутович Г. И.*, ЖЭТФ, 54, 1409 (1968).
15. *Казанцев А. П., Сурдутович Г. И.*, ЖЭТФ, 58, 245 (1970).
16. *Махнев В. П., Телегин Г. Г.*, ЖЭТФ, 63, 1212 (1972).
17. *Казачев А. П.*, ЖЭТФ, 60, 500 (1971).
18. *Spencer M. B., Lamb W., Jr.*, Phys. Rev., A5, 893 (1972).
19. *Казанцев А. П.*, ЖЭТФ (1974, в печати).

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
1. Ф. Т. АРЕККИ. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФОТООТСЧЕТОВ И СТАТИСТИКА ПОЛЯ	7
§ 1. Введение	7
§ 2. Распределения фотоотсчетов	14
§ 3. Измерения распределений фотоотсчетов	22
§ 4. Ошибки и пределы применимости СФО	31
§ 5. Совместные функции распределения фотоотсчетов	38
§ 6. Статистические свойства лазерного излучения	44
§ 7. Приложения СФО к проблемам рассеяния	67
Приложение	80
Литература	83
2. М. СКАЛЛИ. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЛАЗЕРА — ПРОБЛЕМА НЕРАВНОВЕСНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ	86
Введение	86
§ 1. Полуклассическая теория лазера	87
§ 2. Квантовая теория излучения и статистическая физика	100
§ 3. Уравнение движения матрицы плотности лазерного излучения	111
§ 4. Обсуждение уравнения движения, статистического распределения фотонов и статистики фотоэлектронов	122
§ 5. Недиagonальные элементы матрицы плотности и спектральный профиль	133
Литература	141
3. Г. ХАКЕН, В. ВАЙДЛИХ. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЛАЗЕРА	143
Введение	143
§ 1. Гамильтониан лазерной системы	147
§ 2. Вывод фундаментальных лазерных уравнений	152
§ 3а. Решение ланжевеновских уравнений	168
§ 3б. Непосредственное решение управляющего уравнения	183
§ 3в. Уравнения Фоккера — Планка и их решения	192
§ 4. Обсуждение конечных результатов	201
Литература	203

ДОПОЛНЕНИЕ

4. А. П. КАЗАНЦЕВ, Г. И. СУРДУТОВИЧ. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ЛАЗЕРА	206
§ 1. Квантовый и квазиклассический методы описания флуктуаций	206
§ 2. Три типа лазеров	209

§ 3. Модель лазера	210
§ 4. Уравнения движения в представлении когерентных состояний	211
§ 5. Получение замкнутой системы уравнений	213
§ 6. Статистические свойства излучения	215
§ 7. Лазер с нелинейной поглощающей ячейкой	224
§ 8. Модель лазера с аномально большими флуктуациями фазы	227
§ 9. Дробовые шумы	230
§ 10. Заключение	231
Приложение	232
Литература	233

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги,
ее оформлении, качестве перевода и дру-
гие, просим присылать по адресу:

129820, Москва, И-110, ГСП,

1-й Рижский пер., д. 2,

Издательство «Мир».

КВАНТОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ
ИЗЛУЧЕНИЯ ЛАЗЕРА

Ф. Арекки, М. Скалли, Г. Хакен, В. Вайдлих

Редактор *В. И. Самсонова*
Художник *М. Мержевский*
Художественный редактор *Е. Н. Самойлов*
Технический редактор *Л. П. Бирюкова*
Корректор *И. П. Максимова*

Сдано в набор 28/VIII 1973 г.

Подписано к печати 13/III 1974 г.

Бумага тип. № 3 84×108¹/₃₂=3,75 бум. л.
12,60 усл. печ. л.,

Уч.-изд. л. 11,49 Изд. № 2/6895

Цена 1 р. 24 к. Зак. 802

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

В 1974 г. выходит в свет книга

МИШЕЛЬ Л., ШААФ М., **Симметрия в квантовой физике**

(Перев. с англ., 15 л., 1 р. 71 к.)

Книга, представляющая собой выпуск 3 серии «Новости фундаментальной физики», составлена из лекций Л. Мишеля, посвященных применению теории групп в квантовой физике (молекулярная, атомная, ядерная физика и физика элементарных частиц), и работы М. Шаафа, посвященной одному из наиболее важных применений теории групп к физике элементарных частиц — теории представлений групп Пуанкаре.

В качестве приложения в книгу включен перевод с итальянского классической работы Э. Майорана (1932), в которой были изложены основы теории бесконечномерных унитарных представлений группы Лоренца и теории релятивистски-инвариантных уравнений.

Книга будет полезна физикам-теоретикам, научным работникам, аспирантам, студентам старших курсов, а также математикам, занимающимся теорией групп.

Книгу можно заказать в магазинах и отделах, торгующих научно-технической литературой, а также в фирменной секции издательства «Мир» в Московском Доме книги.

Адрес магазина: 121019, Москва, Г-19, пр. Калинина, 26.

При заказе ссылайтесь на темплан издательства «Мир» на 1974 г. (позиция № 71).

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

В 1974 г. выходит в свет книга

ПЕРИНА Я., *Когерентность света*

(Перев. с англ., 22 л., 1 р. 97 к.)

В книге дается подробное описание когерентных свойств оптических полей как в рамках классического описания полей излучения, так и методами квантовой электродинамики. Анализируются пределы применимости каждого метода. Достоинство книги — изложение когерентных свойств полей излучения, определяемых функциями корреляции высших порядков.

Книга адресована физикам и инженерам, специализирующимся в области квантовой оптики и квантовой радиофизики, а также специалистам в области статистической теории оптической связи и локации. Она может быть использована также в качестве учебного пособия студентами старших курсов и аспирантами соответствующих специальностей.

Книгу можно заказать в магазинах и отделах, торгующих научно-технической литературой, а также в фирменной секции издательства «Мир» в Московском Доме книги.

Адрес магазина: 121019, Москва, Г-19, пр. Калинина, 26.

При заказе ссылайтесь на темплан издательства «Мир» на 1974 г. (позиция № 66).

11

26D20